Astrophysics / Instruments

Atsushi Shimono

平成 22 年 9 月 7 日

目 次

第I部

Fourier optics

第1章　Introduction

1.1　球面波の場合

球面波は A を複素振幅、r を球面波射出点からの距離、k を波数 ($k\lambda = 2\pi$) とすると

$$\Psi = \frac{A}{r}\exp(ikr)$$

とあらわされる。

いま、ある平面 (ξ, η) 上 (の各点) で球面波が射出 (出射面) されているとする。このとき、垂線が一致し、原点が出射面の原点を通る垂線に乗るようなイメージ面上にある点 (x, y) での波面は、(ξ, η) と (x, y) の距離を r として

$$u(x, y) = \frac{1}{i\lambda}A\iint_\forall \frac{1}{r}\exp(ikr)d\xi d\eta$$

とあらわされる。

これに対して、射出されている部分だけで 1 となる $G(\xi, \eta)$ を開口関数と定義すると

$$u(x, y) = \frac{1}{i\lambda}A\iint_\forall \frac{1}{r}G(\xi, \eta)\exp(ikr)d\xi d\eta$$

である。

1.2　回折現象

いま、2 平面間の距離を R とする。すると r は

$$r^2 = R^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

である。これを利用すると、上述の式は

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{A}{i\lambda}\iint_\forall \frac{1}{r}G(\xi, \eta)\exp\left(ik\left(R^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)^{1/2}\right)d\xi d\eta \\ &= \frac{A}{i\lambda}\iint_\forall \frac{1}{r}G(\xi, \eta)\exp\left(ikR\left(1 + \left(\frac{x-\xi}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{R}\right)^2\right)^{1/2}\right)d\xi d\eta \end{aligned}$$

となる。

1.2.1　近距離近似 — Fresnel 回折

開口サイズに比べて平面間距離が十分長く、かつ $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \sim R\lambda$ 程度であるとする。この場合、$r \sim R$ と近似できる。

このとき

$$\begin{aligned} u(x, y) &\sim \frac{A}{iR\lambda}\iint_\forall G(\xi, \eta)\exp\left(ikR + \frac{ik}{2R}\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)\right)d\xi d\eta \\ &= -\frac{iA}{R\lambda}\exp(ikR)\iint_\forall G(\xi, \eta)\exp\left(i\frac{\pi}{R\lambda}\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)\right)d\xi d\eta \end{aligned}$$

と近似される。

1.2.2　遠距離近似 — Fraunhofer 回折

平面間距離が十分離れていて $\xi^2+\eta^2 \ll R\lambda$ である場合、イメージ面での分布は

$$u(x,y) \sim -\frac{iA}{R\lambda}\exp(ikR)\iint_{\forall} G(\xi,\eta)\exp\left(i\frac{\pi}{R\lambda}\left((x^2+y^2)-2(x\xi+y\eta)\right)\right)d\xi d\eta$$
$$= -\frac{iA}{R\lambda}\exp(ikR(x^2+y^2))\iint_{\forall} G(\xi,\eta)\exp\left(-i\frac{2\pi}{R\lambda}(x\xi+y\eta)\right)d\xi d\eta$$

となる。

いま、$u(x,y)$ と $G(\xi,\eta)$ はそれぞれ 2 次元ユークリッド空間 $(x,y),(\xi,\eta)$ での可積分関数であるといえ、内積 $\mathbf{x}\cdot\xi = x\xi+y\eta$ が成立することから、この積分は 2 空間の間のフーリエ変換であるといえる。よって、遠方場における回折光パターンは、開口関数のフーリエ変換で表される。

1.2.3　実例

円形開口

円形開口の開口関数をデルタ的な分布

$$G(\xi,\eta) = \begin{cases} E_0 \cdots \xi^2+\eta^2 < a^2 \\ 0 \cdots else \end{cases}$$

で定義する。

イメージ面での強度分布 $A(x,y)$ はフーリエ変換

$$A(x,y) = \iint_{\forall} G(\xi,\eta)\exp(-i(x\xi+y\eta))d\xi d\eta$$

となる。極座標変換により積分し

$$A(r,\theta) = \int_0^a 2\pi J_0(r\rho)d\rho = \frac{2\pi a}{r}J_1(ra)$$

となる。つまり、円形開口による干渉パターンは 1 次ベッセル関数の二乗。(エアリーパターン)

一列に並んだ開口

円形開口が一列に N 個並んだ開口を考える。各開口は直径 ϕ で広がり、中心間距離 a とする。開口関数は

$$G(\xi,\eta) = \sum_{\forall N} G_j(\xi,\eta) = \sum_{\forall N} G_0(\xi-ja,\eta)$$

とあらわされ

$$A(x,y) = A_0(x,y)\sum_{\forall N}\exp(-ijka)$$

となる。つまり、干渉パターンは単一の円形開口のパターンに開口を並べたことによる効果 $\sum_{\forall N}\exp(-ijka)$ を重ね合わせたパターンとなる。

$$\sum_{\forall N}\exp(-ijka) = \frac{1-\exp(-iNka)}{1-\exp(-ika)}$$
$$= \exp\left(-ik(N-1)a/2\right)\frac{\exp(iNka/2)-\exp(-iNka/2)}{\exp(ika/2)-\exp(-ika/2)} = \exp\left(-i\frac{k(N-1)a}{2}\right)\frac{\sin(Nka/2)}{\sin(ka/2)}$$

であるので、この効果は $k=4\pi/Na$ ごとにピークを持つパターンとなる。

1.2.4　レンズ系の取り扱い