鏡面形状 — Structure function についての考察

岡山新技術望遠鏡グループ

平成 23 年 2 月 23 日

目 次

1　概要 **1**

2　Structure function (構造関数) **1**

3　鏡面形状のフーリエ変換による構造関数の導出 **2**

3.1　導出 2

3.2　実際の CGH データへの適用 2

1　概要

望遠鏡に利用される鏡材の表面形状精度について、2 点間距離に対する波面誤差の典型値による Structure function (構造関数) の形で精度が定義されることがある。この構造関数の特性について考察し、また必要精度を規定する際に利用される Kolmogorov 乱流と Fried パラメータとの関係についてまとめる。

2　Structure function (構造関数)

Structure function (構造関数) は、ある距離 r 離れた鏡面上にある任意の 2 点間での位相差の統計量であり

$$D_\phi(r) = \left\langle (\phi(x+r) - \phi(x))^2 \right\rangle_x$$

として定義される。ただし、$<\alpha>_x$ は $\forall x$ での平均値とする。

Kolmogorov 乱流モデルによる波面への影響を構造関数で表すと屈折率の構造係数 C_n を利用して

$$D_\phi(r) = {C_n}^2 \frac{r^2}{3}$$

となり、典型的な乱流のスケール r_0 (コヒーレンス長もしくは Fried パラメータと呼ばれる) と参照波長 λ により

$$D_\phi(r) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \cdot 6.88 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{5/3}$$

とあらわされる。コヒーレンス長 r_0 は、指向する方向の天頂角 (zenith angle) z により

$$r_0 = 0.185\lambda^{6/5} \cos^{3/5}\left(z\left(\int ({C_n}^2 dh)\right)^{-3/5}\right)$$

となる。

3　鏡面形状のフーリエ変換による構造関数の導出

3.1　導出

構造関数は鏡面形状の相関係数として定義されているため、形状データのフーリエ変換によって導出できると考えられる。

まず、鏡面形状 $\phi(x)$ が連続データとして定義されていると仮定すると

$$D_\phi(r) = \left\langle (\phi(x+r) - \phi(x))^2 \right\rangle_x \simeq \left(\int_{\forall x} (\phi(x+r) - \phi(x))^2 \, dx \right) \Bigg/ \left(\int_{\forall x} dx \right)$$

といえる。よって

$$D_\phi(r) = \left(\int_{\forall x} \phi^2(x+r)dx - 2\int_{\forall x} \phi(x+r)\phi(x)dx + \int_{\forall x} \phi^2(x)dx \right) \Bigg/ \left(\int_{\forall x} dx \right) = 2\left(\int_{\forall x} \phi^2(x)dx - \int_{\forall x} \phi(x)\phi(x+r)dx \right) \Bigg/ \left(\int_{\forall x} dx \right)$$

となり (連続) 自己相関関数 $R_{\phi\phi}$ が $\phi(x)$ が実関数であることから

$$R_{\phi\phi}(r) = \phi^*(-r) * \phi(r) = \int_{\forall x} \phi^*(x-r)\phi(x)dx = \int_{\forall x} \phi(x-r)\phi(x)dx$$

となることを利用すると

$$D_\phi(r) = 2\left(R_{\phi\phi}(0) - R_{\phi\phi}(r) \right) \Bigg/ \int_{\forall x} dx$$

となる。

ここで、ウィーナー・ヒンチンの定理 (もしくは Khinchine-Kolmogorov の定理) よりパワースペクトル密度 $S_{\phi\phi}(f)$ と統計的期待値による自己相関関数[1] $R_{\phi\phi}(r)$ がフーリエペアであることを利用すると上記の表式はそのまま $D_\phi(r)$ を $S_{\phi\phi}(f)$ のフーリエペアであらわすように読み替えることができる。つまり、パワースペクトル密度 $S_{\phi\phi}(f)$ のフーリエペア $s_{\phi\phi}(r)$ により

$$D_\phi(r) = 2\left(s_{\phi\phi}(0) - s_{\phi\phi}(r) \right)$$

とあらわされる。

3.2　実際の CGH データへの適用

いま、実際の CGH データへ適用することを考えると、鏡面分布データのパワースペクトル密度を求める操作が入っていることから、最終的にもとまる分布関数は全幅の 1/4 までしか求めることができないのであまり使えない。。

[1]定義によりこれは自己相関係数になる？