

研磨機資料 - 鏡面形状

岡山新技術望遠鏡グループ

平成 22 年 7 月 1 日

目次

1	概要	1
2	定義	1
2.1	鏡面定義	1
2.2	座標定義	2
3	座標系変換	2
3.1	別解 by 岩室さん	4
4	鏡面形状の導出	4
4.1	鏡面位置	4
4.2	鏡面に対する垂線	5
5	研磨アーム	6
6	最終導出戦略	7

1 概要

この研磨機による加工は、鏡面形状および平坦度を最終的に仕上げるのが目的である。よって、研磨機に取り付けている研磨パッドは、加工によって製作しようとしている鏡面の形状に沿って動かす必要がある。このため、研削盤上に置いた状態で、加工目標とする鏡面がどのような曲面を占めるかを把握し、それに合致した位置情報を持って研磨機およびそれを取り付けた研削盤全体を動かすことが重要となる。

このレポートでは、この加工目標とする鏡面の形状について、必要とされる各種のパラメータを把握することを目標とする。このパラメータには、鏡面が占める位置座標、その座標における鏡面に対する垂線などが含まれる。

2 定義

2.1 鏡面定義

鏡面は、設計での定義から (r, y) に対して次の関数で定義される。なお、原点は主軸上の鏡面の点、 r は主軸からの半径、 y は主軸方向の鏡面の位置とする。

$$(1+k)y^2 - 2Ry + r^2 = 0 \quad (1)$$

なお、 k は conic parameter、 R は鏡面の曲率である。
 設計パラメータは、 $k = -1.034609$ 、 $R = 10000$ (mm) である。

2.2 座標定義

計算を容易にするため、1のように二つの直交座標系を定義する。ただし、いずれの座標系に対しても、動径方向での鏡材がなす扇形中心を通る直径に対して垂直な方向を X 軸とし、鏡材の主軸に垂直な平面への投影図で直径方向の中心点を鏡材の中心とする。¹

座標系	原点	Y 軸の方向	備考
$(x, y, z)_m$	中心と定義した位置での鏡面	原点での鏡面に対する垂線	研削盤に乗せた時の状態
$(x, y, z)_p$	鏡面と主軸の交点	主鏡主軸方向	望遠鏡での座標系

表 1:

定義から、実際の鏡材の背面は、 $(x, y, z)_m$ 座標系では鏡材中心点での厚さ w_c を用いて $y_m = w_c$ となる平面としてあらわされることとなる。

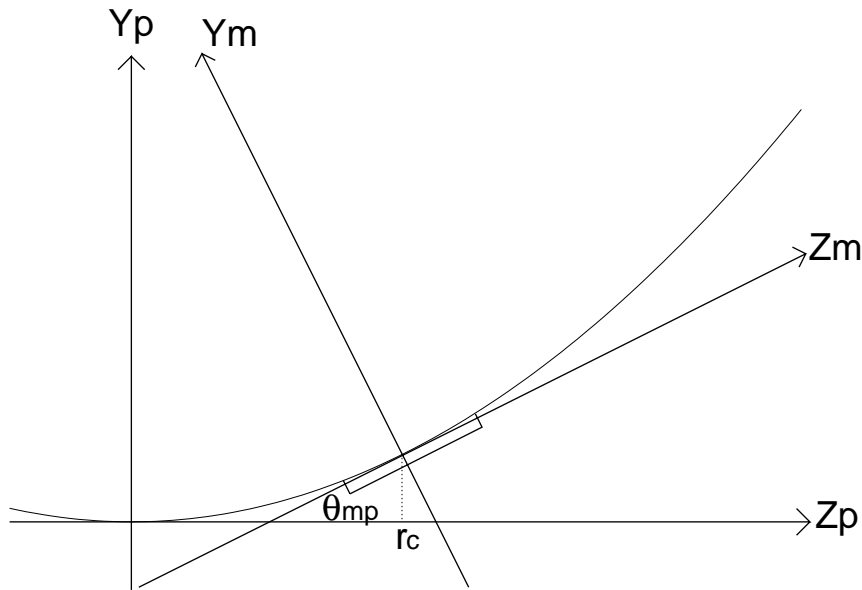


図 1: m / p 座標定義とその関係 ($x = 0$ の平面上を切り出し)

3 座標系変換

まず、定義した二つの座標系の関係を見る。
 座標系間の変換について、

¹あくまで主軸に垂直な平面への投影上、つまり $(x, y, z)_p$ 座標系での $x-z$ 平面である。よって、中心点に接する平面への投影上、つまり $(x, y, z)_m$ 座標系での $x-z$ 平面への投影での中心点定義ではないことに注意。

$$(x, y, z)_p^t = A \cdot (x, y, z)_m^t + (x, y, z)_{mp}^t \quad (2)$$

とすると、 r_c を鏡材中心での望遠鏡主軸からの距離、 y_{mp} を

$$(1+k)y_{mp}^2 - 2Ry_{mp} + r_c^2 = 0 \quad (3)$$

にて定義すると、 $(x, y, z)_{mp} = (0, y_{mp}, r_c)$ となり、座標変換行列については、 p 座標系での Z_m 軸の角度、つまり Z_m 軸と Z_p 軸のなす角を θ_{mp} とすると

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{mp} & \sin \theta_{mp} \\ 0 & -\sin \theta_{mp} & \cos \theta_{mp} \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる。つまり、書き下すと

$$(x, y, z)_p^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{mp} & \sin \theta_{mp} \\ 0 & -\sin \theta_{mp} & \cos \theta_{mp} \end{pmatrix} \cdot (x, y, z)_m^t + (0, y_{mp}, r_c)^t \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_p = x_m \\ y_p = y_m \cos \theta_{mp} + z_m \sin \theta_{mp} + y_{mp} \\ z_p = -y_m \sin \theta_{mp} + z_m \cos \theta_{mp} + r_c \end{cases} \quad (6)$$

である。

この θ_{mp} について具体的な表式を求める。まず、定義から

$$\tan \theta_{mp} = \left. \frac{\partial y_p}{\partial z_p} \right|_{z_p=r_c, x_p=0} \quad (7)$$

である。いま、 y_p は

$$(1+k)y_p^2 - 2Ry_p + (x_p^2 + z_p^2) = 0 \quad (8)$$

$$y_p = \frac{R - \sqrt{R^2 - (1+k)(x_p^2 + z_p^2)}}{1+k} \quad (9)$$

とあらわされるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_p}{\partial z_p} &= \frac{\partial}{\partial z_p} \left(\frac{-1}{1+k} \right) (R^2 - (1+k)(z_p^2 + x_p^2))^{1/2} \\ &= \frac{-1}{1+k} \frac{1}{2} (R^2 - (1+k)(z_p^2 + x_p^2))^{-1/2} (-1+k)2z_p \\ &= z_p (R^2 - (1+k)(z_p^2 + x_p^2))^{-1/2} \end{aligned} \quad (10)$$

であり、 θ_{mp} は

$$\theta_{mp} = \arctan \left(z_p (R^2 - (1+k)(z_p^2 + x_p^2))^{-1/2} \right) \quad (11)$$

$$= \arctan \left(r_c (R^2 - (1+k)r_c^2)^{-1/2} \right) \quad (12)$$

となる。

3.1 別解 by 岩室さん

鏡面の定義式は C_1 級なので陰関数定理が適用できる。つまり、

$$\Psi = (1+k)y^2 - 2Ry + r^2 \quad (13)$$

とすると、この曲面上の点 $\mathbf{x}_0 = (x, y, z)_0$ における単位垂線ベクトルは

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\nabla\Psi|} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) \quad (14)$$

とあらわされる。いま、

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_0} = 2x_0 \\ \left. \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_0} = 2(1+k)y_0 - 2R \\ \left. \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right|_{\mathbf{x}_0} = 2z_0 \end{cases} \quad (15)$$

であるので、単位垂線ベクトル \mathbf{n} は

$$\mathbf{n} = \left(((1+k)y_0 - R)^2 + x_0^2 + z_0^2 \right)^{-1/2} (x_0, (1+k)y_0 - R, z_0) \quad (16)$$

$$= (R^2 - k(x_0^2 + z_0^2))^{-1/2} (x_0, (1+k)y_0 - R, z_0) \quad (17)$$

である。このとき θ_{mp} について $\mathbf{x}_0 = (0, y_{mp}, r_c)$ であるので、前出と同じ式が導出できる。

4 鏡面形状の導出

4.1 鏡面位置

最終的には m 座標系での鏡面形状を導出する必要がある。よって、 m 座標系上で、ある x_p - z_p ペアに対応する y_p を求める、という表式を目標とする。

各 $(a, 0, c)_m$ の組に対して、鏡面位置は $(a, t, c)_m$ とすると

$$(a, c \sin \theta_{mp} + y_{mp}, c \cos \theta + r_c)_p + (0, \cos \theta, -\sin \theta)_p \times t \quad (18)$$

$$= (a, c \sin \theta + y_{mp} + t \cos \theta, c \sin \theta + r_c - t \sin \theta)_p \quad (19)$$

である。いま、

$$\begin{aligned} t' &= t \cos \theta \\ b' &= c \sin \theta + y_{mp} \\ c' &= c \cos \theta + r_c \end{aligned} \quad (20)$$

とすると $(a, b', c')_p + t'(0, 1, -\tan \theta_{mp})_p$ と変換でき、これを鏡面の定義に代入すると、

$$(1+k)(b' + t')^2 - 2R(b' + t') + a^2 + (c' - t' \tan \theta_{mp})^2 = 0 \quad (21)$$

であり、

$$\begin{cases} \alpha &= (1+k) + \tan^2 \theta_{mp} \\ \beta &= 2(1+k)b' - 2R - 2c' \tan \theta_{mp} \\ \gamma &= (1+k)b'^2 - 2Rb' + a^2 + c'^2 \end{cases} \quad (22)$$

として、

$$t' = \frac{1}{2\alpha} \left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) \quad (23)$$

$$t = \frac{t'}{\cos \theta} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta_{mp}} t' \quad (24)$$

である。つまり、研削盤制御座標 $(a, 0, c)_m$ に対する鏡面の高さは

$$t = \sqrt{1 + \tan^2 \theta_{mp}} \frac{1}{2\alpha} \left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) \quad (25)$$

となる。ただし前述と同じく α, β, γ については展開した形で

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + k + \tan^2 \theta_{mp} \\ \beta &= 2kc \sin \theta_{mp} + 2(1+k)y_{mp} - 2R - 2r_c \tan \theta_{mp} \\ \gamma &= (1+k)(c^2 \sin^2 \theta_{mp} + 2c \sin \theta_{mp} y_{mp}) - 2Rc \sin \theta_{mp} + c^2 \cos^2 \theta_{mp} + 2c \cos \theta_{mp} r_c \end{aligned} \quad (26)$$

である。

4.2 鏡面に対する垂線

このような位置における鏡面に対する垂線を求める。ただし、簡単のために p 座標系における垂線を求め、それを座標変換することにする。

p 座標系での点 $M_p = (a_p, b_p, c_p)_p$ が鏡面位置とするとき、この点における鏡面に対する垂線ベクトルは

$$\left(-\frac{\partial y_p}{\partial x_p} \Big|_{M_p}, 1, -\frac{\partial y_p}{\partial z_p} \Big|_{M_p} \right) = \left(-a_p (R^2 - (1+k)(a_p^2 + c_p^2))^{-1/2}, 1, -c_p (R^2 - (1+k)(a_p^2 + c_p^2))^{-1/2} \right) \quad (27)$$

である。

これを m 座標系に変換する。変換行列は

$$(x, y, z)_m^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{mp} & \sin \theta_{mp} \\ 0 & -\sin \theta_{mp} & \cos \theta_{mp} \end{pmatrix}^{-1} \cdot (x, y, z)_p^t + (x_0, y_0, z_0)_m^t \quad (28)$$

となるが、座標定義から座標変換の原点は $(x_0, y_0, z_0)_m = (0, r_c \sin \theta_{mp} - y_{mp} \cos \theta_{mp}, -y_{mp} \sin \theta_{mp} - r_c \cos \theta_{mp})$ である。また変換行列について

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{mp} & \sin \theta_{mp} \\ 0 & -\sin \theta_{mp} & \cos \theta_{mp} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{mp} & -\sin \theta_{mp} \\ 0 & \sin \theta_{mp} & \cos \theta_{mp} \end{pmatrix} \quad (29)$$

となることから、 $\xi = (R^2 - (1+k)(a_p^2 + c_p^2))^{-1/2}$ とすると、垂線ベクトルは m 座標系において

$$\begin{pmatrix} a_p \\ b_p \cos \theta_{mp} - c_p \sin \theta_{mp} \\ b_p \sin \theta_{mp} + c_p \cos \theta_{mp} \end{pmatrix}_m + u \begin{pmatrix} -\xi a_p \\ \cos \theta_{mp} + \xi c_p \sin \theta_{mp} \\ \sin \theta_{mp} - \xi c_p \cos \theta_{mp} \end{pmatrix}_m + \begin{pmatrix} 0 \\ r_c \sin \theta_{mp} - y_{mp} \cos \theta_{mp} \\ -y_{mp} \sin \theta_{mp} - r_c \cos \theta_{mp} \end{pmatrix}_m \quad (30)$$

$$= \begin{pmatrix} -\xi a_p \\ \cos \theta_{mp} + \xi c_p \sin \theta_{mp} \\ \sin \theta_{mp} - \xi c_p \cos \theta_{mp} \end{pmatrix}_m u + \begin{pmatrix} a_p \\ r_c \sin \theta_{mp} - y_{mp} \cos \theta_{mp} + b_p \cos \theta_{mp} - c_p \sin \theta_{mp} \\ -y_{mp} \sin \theta_{mp} - r_c \cos \theta_{mp} + b_p \sin \theta_{mp} + c_p \cos \theta_{mp} \end{pmatrix}_m \quad (31)$$

である。これにより垂線ベクトルが求まった。

これに対応させたい座標は $(a, t, c)_m$ であるので、対応する p 座標系での位置

$$(a, c \sin \theta_{mp} + y_{mp} + t \cos \theta_{mp}, c \sin \theta_{mp} + r_c - t \sin \theta_{mp})_p \quad (32)$$

に対して、 m 座標系での垂線ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -\xi a_p \\ \cos \theta_{mp} + \xi c_p \sin \theta_{mp} \\ \sin \theta_{mp} - \xi c_p \cos \theta_{mp} \end{pmatrix}_m \quad (33)$$

となる。

5 研磨アーム

研磨アームの固定点と研磨パッド先端の位置関係を考える。研磨アームの長さを L 、首振り角 ϕ_{arm} 、回転角 θ_{arm} を図のように定義する。

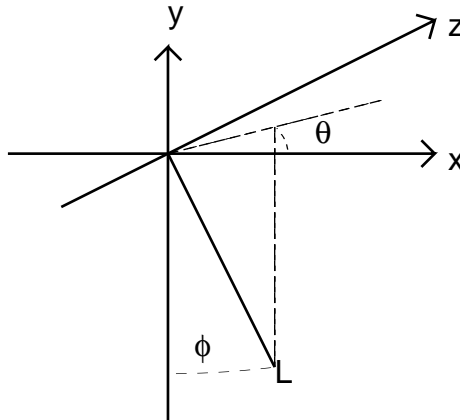


図 2: 研磨アーム軸定義

固定位置を基準としたアームの先端位置は

$$\begin{pmatrix} x_{arm} \\ y_{arm} \\ z_{arm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{arm} & 0 & -\sin \theta_{arm} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{arm} & 0 & \cos \theta_{arm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_{arm} & -\sin \phi_{arm} & 0 \\ \sin \phi_{arm} & \cos \phi_{arm} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_{arm} \sin \phi_{arm} \\ -L \cos \phi_{arm} \\ L \sin \theta_{arm} \sin \phi_{arm} \end{pmatrix} \quad (35)$$

と求められ、ここから水平位置ずれは $(x, z) = (L \cos \theta_{arm} \sin \phi_{arm}, L \sin \theta_{arm} \sin \phi_{arm})$ となる。また、軸方向に関してはこの先端位置を示すベクトルを L で割ったものとなる。

いま、 $0 \leq \phi_{arm} \leq 5$ 度程度であるとすると、水平ずれは最大で $\sim 0.09L$ 程度となるが、 $L \sim 20$ cm とすると 17mm 程度にもなり無視できない。

6 最終導出戦略

これまで、各要素に対しての位置・ベクトルを見てきた。これらの情報や角度が距離や位置ずれに及ぼす影響を考慮して、ある研削盤制御位置に対する必要なパラメータの(単純な)導出法を議論する。

研磨アームの固定点を基準として計算した場合、実際の研磨中心点は研磨アームの長さ分だけ基準点から離れたところにくる。この場合、研磨アームの水平ずれ量があるため、研磨中心点を格子状に移動させようとする位置などの導出が大変となる。

逆に、研磨中心点を固定し、それに対して各位置を導出すると簡単にうまくいくといえる。この場合、導出過程における仮定から、研磨軸と鏡面からの垂線ベクトルは一致しており、すべての位置・角度が理想値として導出できる。

これらを考慮したアルゴリズムは以下ようになる。

- ある $(a, 0, c)_m$ を固定する。(この位置を格子状となる理想研磨パッド位置とする)
- そこでの鏡面の高さ位置、垂線ベクトルを求める
- 求まった垂線ベクトルから、研磨アームの長さを利用し固定点の水平・垂直位置を出す
- 研磨軸固定点から研削盤位置制御パラメータを出す
- 鏡面の垂線ベクトルから研磨軸角度制御パラメータを出す