

鏡面形状 II — 形状誤差の定義と PSF への影響 I

岡山新技術望遠鏡グループ

平成 23 年 6 月 15 日

目次

1 概要	1
2 構造関数	1
2.1 定義と鏡面への適用	1
2.2 構造関数と鏡面形状の関係	2
3 CGH 測定での曲率誤差の影響	3
3.1 定義	3
3.2 セグメント上各点での曲率誤差による鏡面ずれ量	3
3.3 位相差分布を平均化するアクチュエータ駆動量	4
3.4 PCS 位置でのセグメント間の傾き差の影響	5
4 PSF イメージでの像状態の評価方法	6
4.1 Strehl ratio	6
4.2 E50	7

1 概要

望遠鏡に利用されるセグメント鏡材の鏡面形状は、CGH 法による測定時の曲率誤差と測定された鏡面形状誤差の二つによって表現することができる。鏡面形状誤差と PSF の間にはフーリエ変換 (パワースペクトル) で記述できる関係が存在するため、鏡面形状誤差の仕様を構造関数と呼ばれる鏡面の 2 点相関関数で定義することができる。また、大気乱流も同様な関数で表すことができる構造を持っており、大気乱流を補正する AO システムを含まない系では、シーイングよりも十分によい望遠鏡の性能を実現するための指標としてこの大気乱流モデルの構造を援用可能であるといえる。

ここでは、曲率誤差と構造関数を与えたときに、統計的にどの程度の PSF が得られると期待されるかを求める方法について議論する。

2 構造関数

2.1 定義と鏡面への適用

構造関数 (Structure function) は、ある距離 r 離れた鏡面上にある任意の 2 点間での位相差の統計量であり

$$D_{\phi}(r) = \langle (\phi(x+r) - \phi(x))^2 \rangle_x$$

として定義される。ただし、 $\langle \alpha \rangle_x$ は $\forall x$ での平均値とする。

Kolmogorov 乱流モデルによる波面への影響を構造関数で表すと屈折率の構造係数 C_n を利用して

$$D_\phi^2(r) = C_n^2 \frac{r^2}{3}$$

となり、典型的な乱流のスケール r_0 (コヒーレンス長もしくは Fried パラメータと呼ばれる) と参照波長 λ により

$$D_\phi^2(r) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \cdot 6.88 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{5/3}$$

とあらわされる。コヒーレンス長 r_0 は、指向する方向の天頂角 (zenith angle) z により

$$r_0 = 0.185\lambda^{6/5} \cos^{3/5} \left(z \left(\int (C_n^2 dh) \right)^{-3/5} \right)$$

となる。

この乱流モデルの構造関数に対して、望遠鏡の AG などの機構によって補正される tip-tilt 成分を除き、鏡面のローカルな表面粗さ σ を加える。これは、望遠鏡の口径を D とすると

$$D_\phi^2(r) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \cdot 6.88 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{5/3} \left(1 - 0.975 \left(\frac{r}{D}\right)^{1/3}\right) + 2\sigma^2$$

とあらわされる¹。

2.2 構造関数と鏡面形状の関係

構造関数は鏡面形状の相関係数として定義されているため、鏡面形状データのフーリエ変換によって構造関数を導出できると考えられる。

まず、鏡面形状 $\phi(x)$ が連続データとして定義されていると仮定すると

$$D_\phi(r) = \langle (\phi(x+r) - \phi(x))^2 \rangle_x \simeq \left(\int_{\sqrt{x}} (\phi(x+r) - \phi(x))^2 dx \right) \left/ \left(\int_{\sqrt{x}} dx \right) \right.$$

といえる。よって

$$D_\phi(r) = \left(\int_{\sqrt{x}} \phi^2(x+r) dx - 2 \int_{\sqrt{x}} \phi(x+r)\phi(x) dx + \int_{\sqrt{x}} \phi^2(x) dx \right) \left/ \left(\int_{\sqrt{x}} dx \right) \right. = 2 \left(\int_{\sqrt{x}} \phi^2(x) dx - \int_{\sqrt{x}} \phi(x)\phi(x+r) dx \right) \left/ \left(\int_{\sqrt{x}} dx \right) \right.$$

となり (連続) 自己相関関数 $R_{\phi\phi}$ が $\phi(x)$ が実関数であることから

$$R_{\phi\phi}(r) = \phi^*(-r) * \phi(r) = \int_{\sqrt{x}} \phi^*(x-r)\phi(x) dx = \int_{\sqrt{x}} \phi(x-r)\phi(x) dx$$

となることを利用すると

$$D_\phi(r) = 2 \left(R_{\phi\phi}(0) - R_{\phi\phi}(r) \right) \left/ \int_{\sqrt{x}} dx \right.$$

となる。

ここで、ウィーナー・ヒンチンの定理よりパワースペクトル密度 $S_{\phi\phi}(f)$ と統計的期待値による自己相関関数 $R_{\phi\phi}(r)$ がフーリエペアであることを利用すると上記の表式はそのまま $D_\phi(r)$ を $S_{\phi\phi}(f)$ のフーリエペアであらわすように読み替えることができる。つまり、パワースペクトル密度 $S_{\phi\phi}(f)$ のフーリエペア $s_{\phi\phi}(r)$ により

$$D_\phi(r) = 2 \left(s_{\phi\phi}(0) - s_{\phi\phi}(r) \right)$$

とあらわされる。

以上より、構造関数が与えられたときにそれを実現するようなある鏡面形状を生成するには、以下のような変換を行えばよいといえる。ただし、ここで構造関数にする際に鏡面形状から除去されている位相成分を乱数で与えており、生成された鏡面形状はこの乱数分布に依存する。

¹"Structure function analysis of mirror fabrication and support errors" Hvisc & Burge 2007, SPIE 6671-9

- 望遠鏡口径サイズの内側に中心からの距離を r とした構造関数の 2D 分布を生成
- 構造関数の分布を 2 次元フーリエ変換しパワースペクトル密度分布を生成する
- パワースペクトル密度の 2D 分布の各要素点においてランダムな位相を掛ける
- ランダム位相を持つパワースペクトル密度の 2D 分布を 2 次元フーリエ変換する
- 求めた分布データの実成分のみを取り出し鏡面形状分布とする

3 CGH 測定での曲率誤差の影響

3.1 定義

CGH による鏡面形状の測定では、曲率参照鏡とよばれる鏡とそれに対応した特別なパターンを設置することで、最初にターゲットとなるセグメントと CGH 干渉計間の距離が理想的になるように調整する。その後、曲率参照鏡とセグメントを入れ替えることによりセグメントの形状を測定するという 2 段階の手順を行うことになる。ここで、曲率参照鏡を利用した距離の設定精度や入れ替えを行っている間の擾乱などの影響で、測定時に利用された曲率半径 (セグメントと CGH 干渉計との距離) が理想とするセグメントの鏡面曲率半径からずれた状態になっている可能性がある。

この距離の理想からのずれの影響は、CGH 干渉計の測定原点 (CGH から出射されるレーザーの球面中心) からの距離のずれとして測定結果に現れ、測定された形状は"実際に利用された半径を持つ球面のある測定位置 (x, y) での中心からの距離" と "理想的な半径を持つ球面のある測定位置での中心からの距離" の差の分だけずれることになる。

3.2 セグメント上各点での曲率誤差による鏡面ずれ量

CGH での理想的な半径はセグメント鏡の曲率半径ではなく、ターゲットとなる内周・外周それぞれに合わせて設定されたローカル半径となる。今回はそれぞれ内周で $R = 10076[\text{mm}]$ 、外周で $R = 10241[\text{mm}]$ である。

いま、セグメント中心から r_m 離れた点での鏡面ずれ量を考える。実際に利用されたローカル半径は $+\delta$ の $R + \delta$ であるとする。図 1 のように座標を定義すると、

$$\sin \theta = \frac{r_m}{R}$$

であり、セグメント中心に対する高さは

$$R - \frac{r_m}{\tan \theta} = R - \sqrt{R^2 - r_m^2}$$

となる。よって、求める曲率誤差 δ に対する鏡面ずれ量 Δz は

$$\Delta z = \left(R - \sqrt{R^2 - r_m^2} \right) - \left(R + \delta - \sqrt{(R + \delta)^2 - r_m^2} \right)$$

とあらわされる。

いま、 $\delta \ll R$ であることを利用して近似を行うと

$$R - \sqrt{R^2 - r_m^2} = R - R \left(1 - \left(\frac{r_m}{R} \right)^2 \right)^{1/2} \sim \frac{1}{2} \frac{r_m^2}{R} - \frac{1}{6} \frac{r_m^4}{R^3} + \frac{1}{24} \frac{r_m^6}{R^5} - \dots$$

となり

$$\begin{aligned} \Delta z &\sim \frac{1}{2} \left(\frac{r_m^2}{R} - \frac{r_m^2}{R + \delta} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{r_m^4}{R^3} - \frac{r_m^4}{(R + \delta)^3} \right) + \frac{1}{24} \left(\frac{r_m^6}{R^5} - \frac{r_m^6}{(R + \delta)^5} \right) - \dots \\ &\sim \frac{1}{2} \frac{r_m^2}{R^2} \delta - \frac{1}{2} \frac{r_m^4}{R^4} \delta + \dots \sim \frac{1}{2} \left(\frac{r_m^2}{R^2} - \frac{r_m^4}{R^4} + \dots \right) \delta \end{aligned}$$

とあらわされる。

現実的には r_m は R より 2 桁程度小さいため、近似としては一つ目の項まででよいと考えられる。

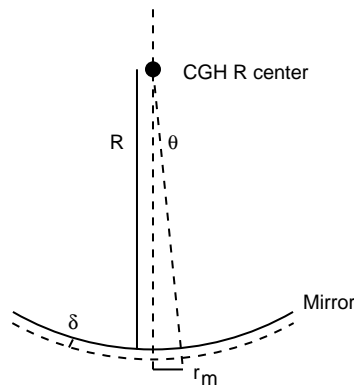


図 1: 座標定義

3.3 位相差分布を平均化するアクチュエータ駆動量

曲率変化 δ があった場合、セグメント鏡面全体にわたり正もしくは負の同じ方向の位相差のずれが発生することになり、アクチュエータで補正することでより全体的な残差を小さくすることができる。実機ではこの補正は PCS により自動的に行われる²が、今回のシミュレーションでは簡単にするために各セグメントにおいて、各セグメントごとにアクチュエータの補正量を出すこととする。

いま、PCS が取り付けられる位置は必ずセグメント間の中央(各セグメント上ではセグメントの最も端店)であるため、補正に利用する値はエッジセンサー取り付け点に最も近いセグメント端(内周で 7 点、外周で 5 もしくは 6 点)での位相ずれの値とする。この値の二乗平均を最小化するようなアクチュエータの駆動量を検討する。ここで、簡単化のためにエッジセンサーの取り付け場所を各セグメントでセグメント系 Y 軸に対して対称である配置を選択すると、曲率変化による位相差分布の影響も Y 軸対称となる³。つまり、アクチュエータによる補正ではセグメントの Z 方向移動 (z) と X 軸方向傾き (v_y) のみを考慮すればよい近似である。ある PCS 取り付け位置 (x, y) での鏡面のずれ Δ は

$$\Delta = yv_y + z + \frac{1}{2} \frac{r_m^2}{R^2} \delta$$

となり、これの二乗和を最小化するという条件は

$$\frac{\partial}{\partial v_y} \sum \Delta^2 = \frac{\partial}{\partial z} \sum \Delta^2 = 0$$

である。これは

$$\frac{\partial}{\partial v_y} \sum \Delta^2 = 2 \sum y^2 \cdot v_y + 2z \sum y + \frac{\sum r_m^2 y}{R^2} \delta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sum \Delta^2 = 2nz + 2v_y \sum y + \frac{\sum r_m^2}{R^2} \delta = 0$$

となり

$$v_y = \frac{\delta}{2R^2} \frac{\sum y \sum r_m^2 - n \sum r_m^2 y}{n \sum y^2 - (\sum y)^2}$$

$$z = -\frac{\delta}{2R^2} \frac{\sum r_m^2 \sum y^2 - \sum r_m^2 y \sum y}{n \sum y^2 - (\sum y)^2}$$

²逆に、この補正がかかったセグメント間の位相差検出しが PCS ではできないため、セグメント鏡面形状の把握はきちんと分割主鏡全体で最適化するためには必須であるといえる。

³実際に、エッジセンサー取り付け位置は特異ベクトルの対称性維持の観点から、主鏡全体にわたって 30 度もしくは 60 度回転による相似形で配置することが要請されており、このセグメント系 Y 軸に対して対称である配置という仮定は成立し、正しいといえる。

となる。この二つの値ともに δ の 1 次式で表されており、それ以外の項は全てエッジセンサーの配置にのみ依存する定数である⁴。

上記に従う現状での各セグメントにおける PCS 定義位置は以下ようになる。数値は (x, y, r_m) の表記である。

- 内周: $(\pm 362.33, -213.43, 420.52), (\pm 474.67, -18.85, 475.04), (0, 339.81, 339.81), (\pm 442.625, 253.712, 510.183)$
- 外周奇数: $(0, -356, 356), (\pm 364.67, -178.03, 405.81), (\pm 425.33, 48.35, 428.07)$
- 外周偶数: $(\pm 158.49, -366.66, 399.39), (\pm 364.67, -178.03, 405.81), (\pm 425.33, 48.35, 428.07)$

なお、この結果を利用する際の注意としては、これによる補正量は各セグメントごとに PCS 定義位置における位相差を最も 0 に近づけるようにするための補正量であり、実際の望遠鏡でのゼロ点が不明な状況下において PCS を利用することで実現される補正量と異なる可能性があるという点である。実際の初期補正では PCS とともに SH のデータも利用しながらセグメント鏡面の初期位相あわせを行うことになるため、SH の結果がより理想状態に近くなるような前述の補正量と異なる補正量となる可能性が高い⁵。

3.4 PCS 位置でのセグメント間の傾き差の影響

PCS 測定位置で、隣り合う 2 セグメントの境界付近において鏡面の傾きに差が発生している場合、検出器上で干渉せずに PCS の役割を果たさない可能性がある。この評価はセグメント境界に置く PCS のハーフミラーサイズ (50mm を予定) による回折限界サイズと、隣り合ったセグメントの境界部分での (曲率変化の影響による) 鏡面の傾きの差によって起こる像位置 (それぞれ単独で像を結ばせた場合の位置) の違いを比較して、像位置の違いが十分に小さいといえる程度であれば問題ないと考えてよい。なお、ここでの評価は前節のようなセグメントの位置補正が行われていない場合を想定する。

いま、2 セグメント間の PCS は次の 4 種類に分けられる。

- 1 内周セグメント間
- 2 内周・外周セグメント間で内周の外縁中央 (外周セグメント ID が奇数)
- 3 内周・外周セグメント間で内周の外周の外側 (外周セグメント ID が偶数)
- 4 外周セグメント間

1,4 の配置の場合、セグメントの辺に平行な方向には曲率による傾きの差はほとんどなく、セグメントの辺に垂直な方向の曲率による傾きの差の成分のみが効く。2 の場合、PCS 位置は 2 セグメントの中心を結ぶ直線上にあるため、曲率による傾きの差はセグメントの辺に垂直方向にのみ発生し、かつ 2 セグメントともに PCS 位置は最もセグメント中心に近い。3 の場合、PCS 位置は 2 セグメントの中心を結ぶ直線状に近いが、セグメントの辺に平行・垂直の両方ともに傾きの差が発生する。これらの 4 つを比較した場合、最も大きな傾きの差が発生するのは 4 の場合であり、これについて評価を行うと上限値が得られるといえる。

PCS の 2 セグメントでの定義位置はそれぞれ、内周 $(\pm 442.625, 253.712, 510.183)$ 、外周 $(\pm 158.49, -366.66, 399.39)$ となり、内周側中心を基準とする外周側の中心の座標は $(\pm 769.5, 491.81)$ であり、PCS 定義位置はほぼ 2 つの中心を結ぶ線上⁶にあるといえ、曲率の差による傾きの差の方向はほぼ同じ方向を向いているといえる。ここで、曲率の差による鏡面の傾きの差は

$$\frac{\partial \Delta}{\partial r_m} = \frac{\delta}{R^2} r_m$$

⁴ 厳密には PCS はその定義点 (x, y, r_m) を中心としたある半径を持つ領域内の平均 (積分) として測定されるため、ランダムでない位相差の変化をもたらす曲率変化は、領域内で効果が打ち消されずに測定される平均位相ずれへのシフト量として効くことになる。しかしながら、この効果は大きくても r_m に対して PCS 半径程度のずれにしかならないため、PCS による位相差測定ステップより十分小さな影響しか及ぼさないと期待され、ここでは無視している。

⁵ ウェイトを掛けない単純な理想状態との差を取るとアクチュエータによる傾きがより小さくなるような補正量になると考えられる。しかしながら、実際には PCS と SH の 2 つのデータ間で測定ステップ・精度が異なることから何らかのウェイトを掛けながら最適な初期位置を求めるアルゴリズムを開発するべきであろう。また、この場合、セグメント鏡を最初に配置する際に、各セグメント鏡の製造終了時の測定結果を参照しながら、隣り合うセグメント間でできるだけセグメントのふち近くや曲率エラーが似た状態になるような配置を考えたいが、PCS/SH での補正を含めた全体の初期位相あわせ時の PSF がよりよくなる可能性が高いといえるかもしれない。

⁶ 厳密には、 $253.712/442.625 = 0.5732$ 、 $491.81/769.5 = 0.6391$ となり、少しずれている。

であることから、 δ [mm] ずれている場合の鏡面の傾きの(それぞれの理想状態に対する)差は内周側で $1.037''\delta$ 、外周側で $0.785''\delta$ である。2 セグメントの曲率誤差が同じ符号である場合にこれらの足し算となり⁷最も大きくなる。この状態を仮定すると、2 セグメントともに $\delta = 0.1$ [mm] の場合にずれは $0.18''$ であり、 $\lambda = 600$ [nm]、 $D=50$ [mm] とした場合の回折限界 $1.22\lambda/D = 3.02''$ より一桁は小さく、セグメント間の傾きの差の影響は曲率誤差 0.1 mm では問題にならないと考えられる。

4 PSF イメージでの像状態の評価方法

PSF イメージを作成することは可能であるが、作成されたイメージを評価する場合、Strehl ratio や E50 などの値を求めて回折限界と比較することで評価するなどの方法を取る必要がある。シミュレーションの計算量などの都合上、PSF イメージの空間分解能は、第一暗環の直径を ~ 10 ピクセルで分割する程度の分解能にしかならないため、中心付近の PSF イメージは整数ピクセル単位で積分された非常に離散的なデータとして出力される。このため、PSF イメージに対してさまざまな指標を求める場合、この離散化の影響が非常に大きく出ると考えられる。この節では、それらの評価方法について検討する。なお、評価についてはあまり精度よくできないと考えられることから Strehl ratio で 0.1 程度の精度を目標とする⁸。

なお、PSF イメージの最強度点 (PSF 中心点) はもとの位相差の全体的な分布の傾きによって変化⁹するため、座標原点に固定せず、ピクセル強度を重みとした X/Y それぞれの軸での加重平均の座標を中心点として評価する。

回折限界像について、 I_0 を中心点での強度、 $\kappa = 2\pi/\lambda$ 、 D は開口直径、 R を開口面と像面との距離で、像面上で中心距離 d の点の角距離 θ は $\theta \sim \sin \theta = d/R$ とすると、像面上での強度分布はイメージ面上での点の視野角 θ が微小である近似におけるフラウンホーファー回折の強度

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{2J_1(\kappa D\theta)}{\kappa D\theta} \right)^2$$

で表される分布を持つ。また、 I_0 は開口を通る全強度 (像面での全積分値に相当) P_0 により

$$I_0 = \frac{P_0 \cdot \pi D^2}{4\lambda^2 R^2}$$

となる。ある半径 θ' を持つ円内での積分強度は

$$P(\theta) = P_0 \left(1 - J_0^2(\kappa D\theta) - J_1^2(\kappa D\theta) \right)$$

とあらわされる。また、上記より $\kappa D\theta \sim 3.8317, 7.0156, 13.3268$ のところに行ける暗環 (それぞれ第一暗環、第二暗環、第三暗環) について、その円内での積分強度はそれぞれ $0.838P_0, 0.910P_0, 0.938P_0$ となる。

4.1 Strehl ratio

Strehl ratio は像の中心強度の回折限界に対する比で定義される¹⁰。しかし、シミュレーションでは離散的なピクセル単位での PSF イメージしかえられないため、中心のある程度の範囲の積分値の比としてしか指標を求めることができない。

PSF の中心点からある半径の円にピクセルの領域の中心が含まれるようなピクセルを集めた領域に対して、PSF 中心点の位置が偏っている場合の影響を考える。回折限界に対する積分値を中心点を中心とする円状にとり、PSF イメージの強度積算では境界にかぶるピクセルについて有効面積比を掛けて積算する¹¹ことを想定すると影響はさほど大きくないと考えられる。いま、境界にあるピクセルでの有効面積比が小さい (0.1 など) 場合や大きい (0.9 など) 場合は積算された値への影響がそもそも小さいために誤差の影響も小さいと考えてよい。よって、有効面積比が 0.5 の場合を考える。たと

⁷ という意味では、隣り合う内周・外周のセグメント間では曲率誤差の符号が逆となる (もしくは曲率誤差がもっとも大きくずれた??) ペアを並べると曲率誤差による PCS への影響を最小にできる可能性があるといえる。ただし、この場合に主鏡鏡面全体としての影響が最小になるかどうかはシミュレーションで検討しなければわからないが。

⁸ この程度でいいのかわかりませんが、大きく崩れているかどうかの定性的な評価には十分と考える。

⁹ ある傾いた平面状に位相差が分布する場合 (Zernike 1 次など) には回折限界像が中心からずれたところに出てくる PSF イメージとなる

¹⁰ 第一暗環までの積分強度の比で表す定義も存在する??

¹¹ 実際には 10×10 の区分積分などを行うことになると思われるが。

例えば第一暗環の半径が 5pixel、積分する半径が 2pixel の場合、一つのピクセルのサイズは $\kappa D\theta \sim 0.766$ であるので、両端の中央に対する強度比は 1.32, 0.683 となり、積分値の誤差はピクセルの値の 0.2 倍程度と推定される。この場合は半径 2pixel の 12.6 ピクセル分の PSF イメージの積算を行うので、この誤差は数%の影響に収まり有効面積比が 0.5 に近い境界ピクセル数は数個に収まることから、誤差の影響は要求する精度である 0.1 程度に収まると考えてよい。

4.2 E50

E50 は、整数ピクセル単位のさまざまな半径での Encircled energy を求め、それが 0.5 を超える点として算出できる。回折限界像の場合の E50 の半径 θ は

$$J_0^2(\kappa D\theta) + J_1^2(\kappa D\theta) = 0.5$$

となる θ である。

しかしながら、回折限界 (第一暗環; この直径内の強度が全体の 0.838 となる) の直径が ~ 10 ピクセル程度にしか分割されないため、E50 は離散化の影響を過度に受け、非常に悪い精度の指標にしかならないといえるので、今回の目的にはあまり適さない¹²。

¹²もちろん、整数ピクセル単位よりも小さな単位で Encircled energy を求めて E50 を算出すればより有効桁数がよい値が出せるが、計算量という意味で Strehl ratio を求める方法より非常に劣るため、実質上あまり意味がない。