分割主鏡シミュレーター (第3版バージョン7) — Index 算出

岡山新技術望遠鏡グループ

平成 23 年 4 月 7 日

目次

1 概要 1

2 位相ずれと PSF への影響の関係 1

3 Zernike モードに対応するアクチュエータ移動量 2

3.1 アクチュエータ駆動量と位相ずれの対応 . . . 2
3.2 Zernike 0,1 次モード成分の分離 . . . 3
3.3 セグメントシフトの影響 . . . 5
3.3.1 X 方向シフト . . . 5
3.3.2 Y 方向シフト . . . 6
3.3.3 セグメント回転 . . . 7
3.3.4 セグメントシフト全体 . . . 7

1 概要

シミュレータにおける制御モジュールによる制御状況の指標として Index を定義し、その Index を用いて制御モジュールのパフォーマンス評価を行う。ここで、どのような Index を採用することが実際の観測時における像精度という意味で実態を反映するものになるの可を検討する。

2 位相ずれと PSF への影響の関係

位相ずれが PSF へ及ぼす影響について、全体的な位相ずれの分布が Zernike 多項式のあるモードに対応するような場合にどのような影響が出るかはわかっている。つまり、Zernike の 0 次 (並進) の場合は焦点位置が光軸方向にずれる効果となり焦点位置ずれの収差に、1 次 (傾き) の場合は PSF 中心の像面での横ずれになる、などである。

このうち、Zernike の 0 次、1 次に対応するモードついては、0 次では副鏡を動かす焦点位置合わせ[1]の操作、1 次では AG によるガイド操作といった、主鏡以外の補正機構で補正できるモードであり、これらは望遠鏡全体としては PSF に (大きく) 影響を及ぼさないといえる。逆に、Zernike の 2 次以上のモードについては、非点収差 (2 次)、コマ収差 (3 次) などの補正できない収差を引き起こし、影響が大きい。

このことから、位相ずれから Zernike 0 次、1 次に対応する成分を引いて評価を行う Index を検討する。

[1]実際には主鏡の並進による位相ずれは ~ 100μm 程度には収まると考えられ、この程度であれば像の悪化の影響は大きくない。なお、副鏡の光軸方向位置調整要求精度は 20μm である。

3 Zernike モードに対応するアクチュエータ移動量

3.1 アクチュエータ駆動量と位相ずれの対応

アクチュエータはセグメント背面を 3 点で平行な方向へ押し引きするように設置されている。そして、(望遠鏡の指向方向が変化しない安定状態では) セグメント自体は変形しない剛体であると近似できるといえ、理想的なアクチュエータ駆動位置からのずれによる鏡面位相のずれは平面を 3 点で押し引きしてできる分布と近似可能[2]である。

ここで、位相差の評価について考える。先に実装した PSF 算出ルーチンでは、位相差分布の評価は主軸に垂直な平面上に主鏡を投影した座標系での評価を行っている[3]。これと同じ評価をアクチュエータ 3 点によるずれに対して考えることになる。

いま、あるセグメントに対しての各種パラメータを次のように取る。

- アクチュエータ 3 点の位置 : $(0, y_1), (-x_2, y_2), (x_2, y_2)$
- アクチュエータ 3 つの変化量 : a_1, a_2, a_3
- セグメント中心での背面への垂線と主軸の角 : θ
- 主軸から見込んだセグメント中心の望遠鏡に対する角位置 : ϕ (ただし、Y 軸正方向を 0º とし反時計回りに増加、X 軸正方向が 90º とする。)

この条件における主軸に垂直な平面上に投影した位相差をアクチュエータの制御位置であらわすことを考える。ある平面は基準原点に対して、平面上の $(0, 0, z_0)$ 点と x,y 軸における傾き v_x, v_y の 3 パラメータで定義できる[4]。上の定義から、セグメント背面を基準とした座標系での z_0^s, v_x^s, v_y^s は

$$v_x^s = \frac{a_3 - a_2}{2x_2}\ ,\ v_y^s = \frac{a_2 + a_3 - 2a_1}{2(y_2 - y_1)}\ ,\ z_0^s = \frac{2a_1y_2 - a_2y_1 - a_3y_1}{2(y_2 - y_1)}$$

となる。

この座標系を主軸を基準とした座標系に変換するのは θ, ϕ を利用した座標回転を行うことで可能である。この変換は、ギャップセンサーの定義の際に利用したセグメント系からグローバル系への変換である。グローバル系でのセグメント理想位置中心点 (x_c^g, y_c^g, z_c^g) に対応するセグメントの中心点 (x_c^g, y_c^g, z_0^g) は、Y-Z 平面内で座標が θ 回転することの影響で、セグメント系でのセグメント中心点とは異なる位置になる。この回転は

$$Y' = y^s \cos\theta - z^s \sin\theta\ ,\ Z' = y^s \sin\theta + z^s \cos\theta$$

で表され、セグメント系での Y-Z 平面でセグメント中心点を通る直線が $z = z_0^s + v_y^s y$ であることからこの直線と $Y' = y^s \cos\theta - z^s \sin\theta = 0$ の交点

$$y_0^s = \frac{z_0^s \sin\theta}{\cos\theta - v_y^s \sin\theta}\ ,\ z_0^s = \frac{z_0^s \cos\theta}{\cos\theta - v_y^s \sin\theta}$$

となり

$$z_0' = z_0^g = \frac{z_0^s}{\cos\theta - v_y^s \sin\theta}$$

で表される。同様に v_y について、この主軸周りの回転をしない X'Y'Z' 系では、$v_x' = v_x^s$ であるが、v_y' についてはそもそも基準となる平面が傾いていることから上述で変換後の傾きから基準の傾き分である $\tan\theta$ を引く操作が必要となり

$$v_y' = \frac{z' - z_0'}{y'} - \tan\theta = \frac{v_y^s \cos\theta + \sin\theta}{v_y^s \sin\theta - \cos\theta} - \tan\theta = \frac{v_y^s}{(\cos\theta - v_y^s \sin\theta)\cos\theta}$$

[2] ここで近似である理由は、鏡面は平面でなく回転曲面であるため、本来はその曲面が傾いたときの理想位置での曲面からの微分差であらわす必要があるが、平面で近似しているという点である。

[3] 入射光がへこんだ鏡面によってレンズ的な効果を受けて収束する場合の、位相差分布の評価、という意味では投影しての評価は妥当と考えた。

[4] ここで平面への垂線の長さ (平面への原点からの距離) ではなく、平面上の $x = y = 0$ の点での座標 z_0 にしているのは、あとで求めることになる位相差の全積分における利用のしやすさから。

となる。そして、v_x, v_y について ϕ は v_x, v_y の回転角となるので

$$v_x^g = v_x^s \cos\phi + \frac{v_y^s}{(\cos\theta - v_y^s \sin\theta)\cos\theta}\sin\phi\,,\; v_y^g = \frac{v_y^s}{(\cos\theta - v_y^s \sin\theta)\cos\theta}\cos\phi - v_x^s \sin\phi$$

となる。z_0^g はこの回転の影響を受けない。

逆変換は、v_x, v_y について

$$v_x^s = v_x^g \cos\phi - v_y^g \sin\phi\,,\; v_y^s = \frac{v_x^g \sin\phi + v_y^g \cos\phi}{1 + \sin\theta\cos\theta(v_x^g \sin\phi + v_y^g \cos\phi)}$$

であり、z_0^s はこれらを代入し

$$z_0^s = \frac{\cos\theta - \sin^3\theta(v_x^g \sin\phi + v_y^g \cos\phi)}{1 + \sin\theta\cos\theta(v_x^g \sin\phi + v_y^g \cos\phi)} z_0^g$$

となる。

3.2 Zernike 0,1 次モード成分の分離

最小二乗法により、18 枚のセグメントのアクチュエータ駆動量に対しての位相差分布から Zernike 0,1 次モード 3 成分を分離する方法を検討する。

まず、これら 3 成分は直交することから座標軸は任意にとることができるので、X,Y 座標軸はシミュレータでの定義と同じ座標軸とする。よって、グローバル系で表記した分割主鏡全体に対して最適なモードのパラメータを前節と同じように[5] v_x^d, v_y^d, z_0^d と表記する。このとき、ある位置 (x^g, y^g) におけるずれ量は $z^g = v_x^d x^g + v_y^d y^g + z_0^d$ である。これに対して、当てはめるべきデータは、あるセグメント i におけるグローバル系でのパラメータ $v_{xi}^g, v_{y_i}^g, z_{0i}^g$ を利用して $u(x,y) = z^g{}_i(x,y) = v_{xi}^g x + v_{y_i}^g y + z_{0i}^g$ である。ただし、ここで前節までで求めている z_{0i}^g は、グローバル系の座標系にはのっているが、基準点がセグメント理想位置の中心点であるため、ここで分割主鏡の光軸を中心とした値に変換する必要がある。

よって、

$$S = \iint_\forall \left((v_x^d x^g + v_y^d y^g + z_0^d) - (v_{xi}^g x + v_{y_i}^g y + z_{0i}^g) \right)^2$$

のパラメータ v_x^d, v_y^d, z_0^d での偏微分が 0 になる値が求める値である。つまり、求める値 v_x^d, v_y^d, z_0^d に対して

$$\frac{\partial S}{\partial v_x^d} = \frac{\partial S}{\partial v_y^d} = \frac{\partial S}{\partial z_0^d} = 0$$

であり

$$v_x^d \iint x^2 dxdy + v_y^d \iint xydxdy + z_0^d \iint xdxdy - \iint u(x,y)xdxdy = 0$$
$$v_x^d \iint y^2 dxdy + v_x^d \iint xydxdy + z_0^d \iint ydxdy - \iint u(x,y)ydxdy = 0$$
$$z_0^d \iint dxdy + v_x^d \iint xdxdy + v_y^d \iint ydxdy - \iint u(x,y)dxdy = 0$$

である。ここで、分割主鏡は全体としてグローバル系の X,Y 各軸に対称であることから

$$\iint_\forall xdxdy = \iint_\forall ydxdy = 0$$

となることから

$$v_x^d \iint x^2 dxdy + v_y^d \iint xydxdy - \iint u(x,y)xdxdy = 0$$
$$v_y^d \iint y^2 dxdy + v_x^d \iint xydxdy - \iint u(x,y)ydxdy = 0$$

[5] ただし、これらのパラメータは分割主鏡の原点である主軸との交点を基準とした Z' 方向ずれと傾きのパラメータであるので注意。

$$z_0^d \iint dxdy - \iint u(x,y)dxdy = 0$$

である。ここから、まず Zernike 0 次については全有効領域での位相差の平均で表されることがわかり

$$z_0^d = \frac{\iint u(x,y)dxdy}{\iint dxdy}$$

である。また、Zernike 1 次については

$$v_x^d = \frac{\iint u(x,y)xdxdy \iint y^2 dxdy - \iint u(x,y)ydxdy \iint xydxdy}{\iint x^2 dxdy \iint y^2 dxdy - \left(\iint xydxdy\right)^2}$$

$$v_y^d = \frac{\iint u(x,y)ydxdy \iint x^2 dxdy - \iint u(x,y)xdxdy \iint xydxdy}{\iint x^2 dxdy \iint y^2 dxdy - \left(\iint xydxdy\right)^2}$$

である。

いま、$u(x,y)$ は各セグメントについて

$$u^i(x,y) = z_{0i}^g + v_{xi}^g \cdot x + v_{yi}^g \cdot y$$

と表わされることから

$$\iint u(x,y)dxdy = \sum_{\forall i}\left(z_{0i}^g \iint dxdy + v_{xi}^g \iint xdxdy + v_{yi}^g \iint ydxdy\right)$$

$$\iint u(x,y)xdxdy = \sum_{\forall i}\left(z_{0i}^g \iint xdxdy + v_{xi}^g \iint x^2dxdy + v_{yi}^g \iint xydxdy\right)$$

$$\iint u(x,y)ydxdy = \sum_{\forall i}\left(z_{0i}^g \iint ydxdy + v_{xi}^g \iint xydxdy + v_{yi}^g \iint y^2dxdy\right)$$

などとなり、(x,y) を (r,θ) の極座標表示に変換すると

$$\iint u(x,y)dxdy = \sum_{\forall i}\left(z_{0i}^g \iint rdrd\theta + v_{xi}^g \iint r^2 \sin\theta drd\theta + v_{yi}^g \iint r^2 \cos\theta drd\theta\right)$$

などと表される。セグメントの投影形状が理想的な扇形であると近似する[6]と、この式の積分項は簡単に求まる定数となりアクチュエータの駆動位置から求まるパラメータのみによって最適な傾きの値を記述できるといえる。

ここであるセグメントが $r_- \sim r_+$、$\theta_- \sim \theta_+$ の範囲を占める場合にこれらの積分項はそれぞれ

$$\iint_{\forall} r^2 \cos\theta drd\theta = \frac{1}{3}({r_+}^3 - {r_-}^3)(\sin\theta_+ - \sin\theta_-)$$

$$\iint_{\forall} r^3 \cos^2\theta drd\theta = \frac{1}{16}({r_+}^4 - {r_-}^4)\left(2(\theta_+ - \theta_-) + \sin 2\theta_+ - \sin 2\theta_-\right)$$

$$\iint_{\forall} r^3 \sin\theta\cos\theta drd\theta = \frac{1}{16}({r_+}^4 - {r_-}^4)(\cos 2\theta_- - \cos 2\theta_+)$$

である。そして、セグメント間の隙間について

$$\iint x^2dxdy = \iint r^3\cos^2\theta drd\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_{\forall r}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\forall\theta}$$

に対して $\sin 2\theta$ の項は、隙間の角度を δ、各セグメント端の角度位置を θ_i とすると

$$[\sin 2\theta]_{\forall\theta} = \sum_{\forall i}(\sin 2\theta_i - \sin 2(\theta_i + \delta)) = \sum_{\forall i}(\sin 2\theta_i - \sin 2\theta_i \cos\delta - \sin\delta\cos 2\theta_i)$$

[6] 内周・外周辺ともに原点を中心とする理想円の一部、左右辺は中心を通る直線であるという扇形であると近似

$$= (1-\cos\delta)\sum_{\forall i}\sin 2\theta_i - \sin\delta\sum_{\forall i}\cos 2\theta_i$$

となり、かつ θ_i は X'Y' 軸対称に存在しているので、この項は打ち消しあう。よって

$$\iint x^2 dxdy = \frac{1}{8}\left[r^4\right]_{\forall r}[\theta]_{\forall\theta}$$

であるといえる。また、同様に

$$\iint xydxdy = \iint r^3\sin\theta\cos\theta drd\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_{\forall r}\left[\frac{-\cos 2\theta}{4}\right]_{\forall\theta} = 0$$

である。

よって v_x^d, v_y^d は、これを利用して

$$v_x^d = \left(\iint x^2 dxdy\right)^{-1}\sum_{\forall i}\left(z_{0i}^g\iint xdxdy + v_{xi}^g\iint x^2 dxdy + v_{yi}^g\iint xydxdy\right)$$

$$v_y^d = \left(\iint y^2 dxdy\right)^{-1}\sum_{\forall i}\left(z_{0i}^g\iint ydxdy + v_{xi}^g\iint xydxdy + v_{yi}^g\iint y^2 dxdy\right)$$

となる。

3.3 セグメントシフトの影響

セグメントシフトを考慮したシミュレーションの場合、セグメントシフトに対応するアクチュエータによる補正が入ることを考慮に入れたインデックスを算出する必要がある。このとき、PSF に直結するパラメータ[7]でなく、上述のような補正制御後のアクチュエータ制御位置の分散などの指標を利用した場合、この量を補正できるようなコードが組み込まれている必要がある。

ここでは、セグメントシフトを補正するために理想的にはどのようなアクチュエータによる補正が行われているべきかという点について検討する。

3.3.1 X 方向シフト

セグメント系でのセグメントに対する横方向 (X^s 方向) のシフト δ は、グローバル系でもセグメントの横方向 (こちらは X^g ではない) にのみ影響する。いま、グローバル系での計算をセグメントの横方向が X^g 方向と同じになるセグメントのみで計算しても、セグメント系に移せば全てのセグメントに適用できる。ここで、シフト後のセグメント移動による光軸方向の鏡面位置変化量を $\xi(x)$ とする[8] と、シフト後のある鏡面上の点に対する理想鏡面の Z 軸位置は $z' = z - \xi$ となる。このとき、グローバル系において鏡面を構成するパラボラ上での座標は $(x+\delta, y, z-\xi)$ であり

$$(1+k)(z-\xi)^2 - 2R(1+k)R(z-\xi) + (x+\delta)^2 + y^2 = 0$$

が成立する。ここで $(1+k)z^2 - 2R(1+k)z + x^2 + y^2 = 0$ が成立することを利用すると

$$-2(1+k)z\xi + (1+k)\xi^2 + 2R\xi + 2x\delta + \delta^2 = 0$$

$$(1+k)\xi^2 - 2\left((1+k)z - R\right)\xi + 2x\delta + \delta^2 = 0$$

[7] 位相分布や PSF そのものなど。ただし、計算量的にシミュレータにそのまま実装していいかどうかというのは非常に疑問な指標となると思われる。

[8] PSF に影響する反射系での位相変化量は $2\xi(x)$ であることに注意。ただし、ここでの計算は全て位相差ではなく移動量ベースの計算を行っているので、このファクターをすべてにおいて無視することでつじつまは合う。(逆に、移動量ベースでアクチュエータ補正駆動量を求めていると考えるほうがいいが。)

であり

$$\xi = (1+k)^{-1}\left(-(R-(1+k)z) \pm \left(((1+k)z-R)^2 - (1+k)(2x\delta+\delta^2)\right)^{1/2}\right)$$

となる。この平方根の中の 2 項目は δ が入った微小項であるのでテーラー展開近似を行い

$$\xi = -(1+k)^{-1}\frac{1}{2}\frac{(1+k)(2x\delta+\delta^2)}{(1+k)z-R} = -\frac{x}{(1+k)z-R}\delta - \frac{1}{2\left((1+k)z-R\right)}\delta^2$$

である。

いま、$z \ll R$ であることを考えると、ξ はほぼ X 位置 x とセグメントシフト量 δ に比例する値を示すといえ、PSF シミュレーションにおける X 方向セグメントシフトによる位相差分布の出力とあう。よって、このセグメントシフトを補正するようなアクチュエータ駆動量は、シフト量が微小であればセグメントシフト量 δ のみの関数で表現できる。アクチュエータ駆動による補正は、位相差分布が x のみの関数であることから、$z \ll R$ による 2 次の微分量も無視して

$$v_x^g = \frac{\delta}{R}\ ,\ v_y^g = 0\ ,\ z_0^g = \frac{\delta^2}{R} \sim 0$$

である。ここで、仮定から $\phi = 0$ であるので $v_x^g = v_x^s$ となり

$$v_x^s = \frac{\delta}{R}\ ,\ v_y^s = 0\ ,\ z_0^s = 0$$

となる。

3.3.2　Y 方向シフト

セグメント系での Y 方向のシフト δ は、グローバル系では Y 方向と Z 方向に影響する。ここで、シフト後の XY に対応する理想鏡面の Z 軸位置がシフトを戻した場合に $z' = z + \xi$ であるとすると、シフトによる鏡面の光軸方向位置変化量は $-\xi$ である。また、シフト後のグローバル系において鏡面を構成するパラボラ上での座標は $(x, y+\delta\cos\theta, z+\delta\sin\theta+\xi)$ であり

$$(1+k)(z+\delta\sin\theta+\xi)^2 - 2R(z+\delta\sin\theta+\xi) + x^2 + (y+\delta\cos\theta)^2 = 0$$

が成立する。ここで $(1+k)z^2 - 2R(1+k)z + x^2 + y^2 = 0$ が成立することを利用すると

$$2(1+k)z(\delta\sin\theta+\xi) + (1+k)(\delta\sin\theta+\xi)^2 - 2R(\delta\sin\theta+\xi) + 2y\delta\cos\theta + \delta^2\cos^2\theta = 0$$

$$(1+k)\xi^2 + (2(1+k)z + 2(1+k)\delta\sin\theta - 2R)\,\xi + 2(1+k)z\delta\sin\theta + (1+k)\delta^2\sin^2\theta - 2R\delta\sin\theta + 2y\delta\cos\theta + \delta^2\cos^2\theta = 0$$

である。

$$\begin{aligned}\Delta &= 2(1+k)z\delta\sin\theta + (1+k)\delta^2\sin^2\theta - 2R\delta\sin\theta + 2y\delta\cos\theta + \delta^2\cos^2\theta \\ &= 2\left(((1+k)z-R)\sin\theta + y\cos\theta\right)\delta + \left((1+k)\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\delta^2\end{aligned}$$

とすると

$$\xi = (1+k)^{-1}\left(R-(1+k)z-(1+k)\delta\sin\theta \pm \left((R-(1+k)z-(1+k)\delta\sin\theta)^2 - (1+k)\Delta\right)^{1/2}\right)$$

であり、X 方向と同様に Δ は δ の入った微小項であるのでテーラー展開による近似を行い

$$\begin{aligned}\xi &= (1+k)^{-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+k)\Delta}{R-(1+k)z-(1+k)\delta\sin\theta} \simeq \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta}{R-(1+k)z} \\ &\simeq \frac{((1+k)z-R)\sin\theta + y\cos\theta}{R-(1+k)z}\delta + \frac{(1+k)\sin^2\theta+\cos^2\theta}{2(R-(1+k)z)}\delta^2\end{aligned}$$

となる。

いま、$z \ll R$ であること、δ は微少量であることを考えると、ξ はほぼ Y 位置 y とセグメントシフト量 δ に比例する値を示すといえ、PSF シミュレーションにおける Y 方向セグメントシフトによる位相差分布の出力とあう。よって、この

セグメントシフトを補正するようなアクチュエータ駆動量は、シフト量が微小であればセグメントシフト量 δ のみの関数で表現できる。よって、δ^2 の項を無視すると

$$\xi \simeq \frac{((1+k)z-R)\sin\theta + y\cos\theta}{R-(1+k)z}\delta \simeq \frac{y\cos\theta}{(R-(1+k)z)}\delta - \delta\sin\theta$$

である。ここで $\delta\sin\theta$ はセグメントが δ 分シフトした影響による分であることから、X 方向シフトと同じく位相差の並進は δ^2 の項であるといえる。よって、アクチュエータ駆動による補正量は、

$$v_x^g = 0\ ,\ v_y^g = \frac{\delta\cos\theta}{(R-(1+k)z)}\ ,\ z_0^g \sim 0$$

である。ここで、$\phi = 0$ であるので

$$v_y^s = \frac{v_y^g}{1+v_y^g\sin\theta\cos\theta}\ ,\ z_0^s = \frac{\cos\theta - v_y^g\sin^3\theta}{1+v_y^g\sin\theta\cos\theta}z_0^g$$

となり

$$v_y^s \sim \frac{\delta\cos\theta}{R}$$

と表される。

3.3.3 セグメント回転

回転による位相分布への影響はアクチュエータの駆動では完全補正が不可能な形で出現するということが PSF シミュレーションにおける位相差分布の調査で明らかになっている。0.02º 回転した場合の位相の最大ずれはリファレンス波長 1μm で ±0.318 である。±0.318 の位相差が各アクチュエータを動かしたときの分布の最大ずれに相当すると想定し、これをアクチュエータ駆動により補正する場合アクチュエータによる補正量は 0.1 ~ 0.15μm となる。

回転による位相分布への影響は 180 度回転対称、もしくは X 軸・Y 軸の 2 軸に対して鏡像対称を示す[9]ことから、セグメント中心位置に対してセグメント全体が 180 度回転対称でない分の影響はアクチュエータの駆動の補正量として現れる可能性がある。ただし、セグメントの回転による影響はパラボラ中心から離れた外周側で大きくなり、逆にセグメントが 180 度回転対称でない影響は外周側で小さくなる。これらを考え合わせると、セグメント回転による位相差分布のずれのアクチュエータによる逆補正値は、前出の 0.1 ~ 0.15μm より 1 桁程度など小さくなると想定されると思われる。この量はギャップセンサーの読み出しノイズの典型量 10 ~ 20nm と同程度であることなどを考えると、シミュレータ中では無視してかまわない程度の量ではないかと考えられる。

3.3.4 セグメントシフト全体

セグメントシフト全体を補正するパラメータをまとめておく。前節からセグメントの回転に対応するアクチュエータ補正量は無視してかまわない程度の量と考えることから、X 方向・Y 方向へのセグメントの並進による影響に対応するアクチュエータ補正量である。

セグメントの併進量を X 方向・Y 方向について、それぞれ δ_x, δ_y とすると

$$v_x^s = \frac{\delta_x}{R}\ ,\ v_y^s = \frac{\delta_y\cos\theta}{R}\ ,\ z_0^s = 0$$

である。

[9]回転原点より内側と外側での影響、つまり Y 軸をはさんだ影響の分布が本当に Y 軸に対して対称であるかは未確認。X 軸については鏡面のパラボラの中心が X 軸を通るなどの定義から明らか。