# 分割主鏡シミュレーター (第3版バージョン7) — Index 算出

岡山新技術望遠鏡グループ

平成 23 年 3 月 31 日

## 目 次



## 1 概要

シミュレータにおける制御モジュールによる制御状況の指標として Index を定義し、その Index を用いて制御モジュールのパフォーマンス評価を行う。ここで、どのような Index を採用することが実際の観測時における像精度という意味で実態を反映するものになるの可を検討する。

## 2 位相ずれと PSF への影響の関係

位相ずれが PSF へ及ぼす影響について、全体的な位相ずれの分布が Zernike 多項式のあるモードに対応するような場合にどのような影響が出るかはわかっている。つまり、Zernike の 0 次 (並進) の場合は焦点位置が光軸方向にずれる効果となり焦点位置ずれの収差に、1 次 (傾き) の場合は PSF 中心の像面での横ずれになる、などである。

このうち、Zernike の 0 次、1 次に対応するモードついては、0 次では副鏡を動かす焦点位置合わせ[1]の操作、1 次では AG によるガイド操作といった、主鏡以外の補正機構で補正できるモードであり、これらは望遠鏡全体としては PSF に (大きく) 影響を及ぼさないといえる。逆に、Zernike の 2 次以上のモードについては、非点収差 (2 次)、コマ収差 (3 次) などの補正できない収差を引き起こし、影響が大きい。

このことから、位相ずれから Zernike 0 次、1 次に対応する成分を引いて評価を行う Index を検討する。

[1]実際には主鏡の並進による位相ずれは ~ 100$\mu$m 程度には収まると考えられ、この程度であれば像の悪化の影響は大きくない。なお、副鏡の光軸方向位置調整要求精度は 20$\mu$m である。

# 3 Zernike モードに対応するアクチュエータ移動量

## 3.1 アクチュエータ駆動量と位相ずれの対応

アクチュエータはセグメント背面を 3 点で平行な方向へ押し引きするように設置されている。そして、(望遠鏡の指向方向が変化しない安定状態では) セグメント自体は変形しない剛体であると近似できるといえ、理想的なアクチュエータ駆動位置からのずれによる鏡面位相のずれは平面を 3 点で押し引きしてできる分布と近似可能[2]である。

ここで、位相差の評価について考える。先に実装した PSF 算出ルーチンでは、位相差分布の評価は主軸に垂直な平面上に主鏡を投影した座標系での評価を行っている[3]。これと同じ評価をアクチュエータ 3 点によるずれに対して考えることになる。

いま、あるセグメントに対しての各種パラメータを次のように取る。

- アクチュエータ 3 点の位置 : $(0, y_1), (-x_2, y_2), (x_2, y_2)$
- アクチュエータ 3 つの変化量 : $a_1, a_2, a_3$
- セグメント中心での背面への垂線と主軸の角 : $\theta$
- 主軸から見込んだセグメント中心の望遠鏡に対する角位置 : $\phi$

この条件における主軸に垂直な平面上に投影した位相差をアクチュエータの制御位置であらわすことを考える。ある平面は基準原点に対して、平面上の $(0, 0, z_0)$ 点と x,y 軸における傾き $v_x, v_y$ の 3 パラメータで定義できる[4]。上の定義から、セグメント背面を基準とした座標系での $z^s_0, v^s_x, v^s_y$ は

$$v^s_x = \frac{a_3 - a_2}{2x_2}\ ,\ v^s_y = \frac{a_2 + a_3 - 2a_1}{2(y_2 - y_1)}\ ,\ z^s_0 = \frac{2a_1y_2 - a_2y_1 - a_3y_1}{2(y_2 - y_1)}$$

となる。

この座標系を主軸を基準とした座標系に変換するのは $\theta, \phi$ を利用した座標回転で可能であり、主軸を基準とした系での $z_0, v_x, v_y$ は次のように求められる。まず、主軸を基準とした系における理想位置でのセグメント中心に対応するセグメント背面の平面上の点 $(0, 0, z_0)$ は、$\phi$ のみにより

$$z_0 = \frac{z^s_0}{\cos\phi - v^s_y \sin\phi}$$

と表される。また、$v_x, v_y$ については $\phi$ は $v_y$ にのみ影響し、$\theta$ は $v_x, v_y$ の回転角となるので

$$v_x = v^s_x \sin\theta + \left((1 - v^{s2}_y)\sin\phi + v^s_y \cos\phi\right)\cos\theta$$
$$v_y = \left((1 - v^{s2}_y)\sin\phi + v^s_y \cos\phi\right)\sin\theta + v^s_x \cos\theta$$

となる。

## 3.2 Zernike 0,1 次モード成分の分離

最小二乗法により、18 枚のセグメントのアクチュエータ駆動量に対しての位相差分布から Zernike 0,1 次モード 3 成分を分離する方法を検討する。

まず、これら 3 成分は直交することから座標軸は任意にとることができるので、X,Y 座標軸はシミュレータでの定義と同じ座標軸とする。まず、Zernike 0 次については全有効領域での位相差の平均で表される。Zernike 1 次について、全有効領域は原点を通る 2 つの座標軸に対して線対称であることから、位相差分布 $u(x, y)$ に対しての最適な傾き量は

$$\delta = \left(\iint_\forall x^2 dxdy\right)^{-1} \cdot \left(\iint_\forall u(x, y) dxdy\right)$$

[2] ここで近似である理由は、鏡面は平面でなく回転曲面であるため、本来はその曲面が傾いたときの理想位置での曲面からの微分差であらわす必要があるが、平面で近似しているという点である。

[3] 入射光がへこんだ鏡面によってレンズ的な効果を受けて収束する場合の、位相差分布の評価、という意味では投影しての評価は妥当と考えた。

[4] ここで平面への垂線の長さ (平面への原点からの距離) ではなく、平面上の $x = y = 0$ の点での座標 $z_0$ にしているのは、あとで求めることになる位相差の全積分における利用のしやすさから。

となる。いま、$u(x,y)$ を各セグメントについて

$$u^i(x,y) = z_0^i + v_x^i \cdot x + v_y^i \cdot y$$

と表すことができることを利用して

$$\delta = \left( \iint_{\forall} x^2 dxdy \right)^{-1} \cdot \left( \sum_{\forall segments} z_0^i \iint_{\forall} xdxdy + \sum_{\forall segments} v_x^i \iint_{\forall} x^2 dxdy + \sum_{\forall segments} v_y^i \iint_{\forall} xydxdy \right)$$

となる。$(x,y)$ を $(r,\theta)$ の極座標表示に変換すると

$$\delta = \left( \iint_{\forall} r^3 \cos^2\theta drd\theta \right)^{-1} \cdot \left( \sum_{\forall segments} z_0^i \iint_{\forall} r^2 \cos\theta drd\theta + \sum_{\forall segments} v_x^i \iint_{\forall} r^3 \cos^2\theta drd\theta + \sum_{\forall segments} v_y^i \iint_{\forall} r^3 \sin\theta\cos\theta drd\theta \right)$$

であり、セグメントの投影形状が理想的な扇形であると近似する[5]と、この式の積分項は簡単に求まる定数となりアクチュエータの駆動位置から求まるパラメータのみによって最適な傾きの値を記述できるといえる。

## 3.3 セグメントシフトの影響

セグメントシフトを考慮したシミュレーションの場合、セグメントシフトに対応するアクチュエータによる補正が入ることを考慮に入れたインデックスを算出する必要がある。このとき、PSF に直結するパラメータ[6]でなく、上述のような補正制御後のアクチュエータ制御位置の分散などの指標を利用した場合、この量を補正できるようなコードが組み込まれている必要がある。

ここでは、セグメントシフトを補正するために理想的にはどのようなアクチュエータによる補正が行われているべきかという点について検討する。

### 3.3.1 X 方向シフト

セグメント系での X 方向のシフト $\delta$ は、グローバル系でも X 方向にのみ影響する。ここで、シフト後の鏡面位置の Z 軸位置が $z' = z + \xi$ であるとする。このとき、グローバル系において鏡面を構成するパラボラ上での座標は $(x+\delta, y, z+\xi)$ であり

$$(1+k)(z+\xi)^2 - 2R(1+k)R(z+\xi) + (x+\delta)^2 + y^2 = 0$$

が成立する。ここで $(1+k)z^2 - 2R(1+k)z + x^2 + y^2 = 0$ が成立することを利用すると

$$2(1+k)z\xi + (1+k)\xi^2 - 2R\xi + 2x\delta + \delta^2 = 0$$

$$(1+k)\xi^2 + 2\left((1+k)z - R\right)\xi + 2x\delta + \delta^2 = 0$$

であり

$$\xi = (1+k)^{-1} \left( R - (1+k)z \pm \left( ((1+k)z - R)^2 - (1+k)(2x\delta + \delta^2) \right)^{1/2} \right)$$

となる。この平方根の中の 2 項目は $\delta$ が入った微小項であるのでテーラー展開近似を行い

$$\xi = (1+k)^{-1} \frac{1}{2} \frac{(1+k)(2x\delta + \delta^2)}{(1+k)z - R} = \frac{x}{(1+k)z - R}\delta + \frac{1}{2\left((1+k)z - R\right)}\delta^2$$

である。

いま、$z \ll R$ であることを考えると、$\xi$ はほぼ X 位置 $x$ とセグメントシフト量 $\delta$ に比例する値を示すといえ、PSF シミュレーションにおける X 方向セグメントシフトによる位相差分布の出力とあう。よって、このセグメントシフトを補

[5] 内周・外周辺ともに原点を中心とする理想円の一部、左右辺は中心を通る直線であるという扇形であると近似

[6] 位相分布や PSF そのものなど。ただし、計算量的にシミュレータにそのまま実装していいかどうかというのは非常に疑問な指標となると思われる。

正するようなアクチュエータ駆動量は、シフト量が微小であればセグメントシフト量 $\delta$ のみの関数で表現できる。アクチュエータ駆動による補正は、位相差分布が $x$ のみの関数であることから

$$a_1 = 0\,,\ a_2 = -a_3 = \frac{x_2}{R-(1+k)z}\delta$$

である。

#### 3.3.2 Y 方向シフト

セグメント系での Y 方向のシフト $\delta$ は、グローバル系では Y 方向と Z 方向に影響する。ここで、シフト後の鏡面位置の Z 軸位置がシフトを戻した場合に $z' = z + \xi$ であるとすると、シフト後のグローバル系において鏡面を構成するパラボラ上での座標は $(x, y+\delta\cos\phi, z+\delta\sin\phi+\xi)$ であり

$$(1+k)(z+\delta\sin\phi+\xi)^2 - 2R(z+\delta\sin\phi+\xi) + x^2 + (y+\delta\cos\phi)^2 = 0$$

が成立する。ここで $(1+k)z^2 - 2R(1+k)z + x^2 + y^2 = 0$ が成立することを利用すると

$$2(1+k)z(\delta\sin\phi+\xi) + (1+k)(\delta\sin\phi+\xi)^2 - 2R(\delta\sin\phi+\xi) + 2y\delta\cos\phi + \delta^2\cos^2\phi = 0$$

$$(1+k)\xi^2 + (2(1+k)z + 2(1+k)\delta\sin\phi - 2R)\,\xi + 2(1+k)z\delta\sin\phi + (1+k)\delta^2\sin^2\phi - 2R\delta\sin\phi + 2y\delta\cos\phi + \delta^2\cos^2\phi = 0$$

である。

$$\begin{aligned}\Delta &= 2(1+k)z\delta\sin\phi + (1+k)\delta^2\sin^2\phi - 2R\delta\sin\phi + 2y\delta\cos\phi + \delta^2\cos^2\phi \\ &= 2\left(((1+k)z-R)\sin\phi + y\cos\phi\right)\delta + \left((1+k)\sin^2\phi + \cos^2\phi\right)\delta^2\end{aligned}$$

とすると

$$\xi = (1+k)^{-1}\left(R-(1+k)z-(1+k)\delta\sin\phi \pm \left((R-(1+k)z-(1+k)\delta\sin\phi)^2 - (1+k)\Delta\right)^{1/2}\right)$$

であり、X 方向と同様に $\Delta$ は $\delta$ の入った微小項であるのでテーラー展開による近似を行い

$$\xi = (1+k)^{-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta}{R-(1+k)z-(1+k)\delta\sin\phi} \simeq (1+k)^{-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta}{R-(1+k)z}$$

となる。

いま、$z \ll R$ であること、$\delta$ は微少量であることを考えると、$\xi$ はほぼ Y 位置 $y$ とセグメントシフト量 $\delta$ に比例する値を示すといえ、PSF シミュレーションにおける Y 方向セグメントシフトによる位相差分布の出力とあう。よって、このセグメントシフトを補正するようなアクチュエータ駆動量は、シフト量が微小であればセグメントシフト量 $\delta$ のみの関数で表現できる。よって、$\delta^2$ の項を無視すると

$$\begin{aligned}\xi &\simeq (1+k)^{-1}\frac{((1+k)z-R)\sin\phi + y\cos\phi}{R-(1+k)z}\delta \\ &= \frac{y\cos\phi}{(1+k)(R-(1+k)z)}\delta - \frac{\sin\phi}{1+k}\delta\end{aligned}$$

である。X 方向シフトでは位相差の並進は $\delta^2$ の項であったが、Y 方向シフトでは全体的に並進した上で Y 軸方向に傾いて分布する形になる。アクチュエータ駆動による補正量は、これら二つの足し合わせとなり

$$a_1 = \frac{y_1\cos\phi}{(1+k)(R-(1+k)z)}\delta - \frac{\sin\phi}{1+k}\delta\,,\ a_2 = a_3 = \frac{y_2\cos\phi}{(1+k)(R-(1+k)z)}\delta - \frac{\sin\phi}{1+k}\delta$$

である。

### 3.3.3 セグメント回転

回転による位相分布への影響はアクチュエータの駆動では完全補正が不可能な形で出現するということが PSF シミュレーションにおける位相差分布の調査で明らかになっている。0.02º 回転した場合の位相の最大ずれはリファレンス波長 $1\mu$m で ±0.318 である。±0.318 の位相差が各アクチュエータを動かしたときの分布の最大ずれに相当すると想定し、これをアクチュエータ駆動により補正する場合アクチュエータによる補正量は 0.1 ~ $0.15\mu$m となる。

回転による位相分布への影響は 180 度回転対称、もしくは X 軸・Y 軸の 2 軸に対して鏡像対称を示す[7]ことから、セグメント中心位置に対してセグメント全体が 180 度回転対称でない分の影響はアクチュエータの駆動の補正量として現れる可能性がある。ただし、セグメントの回転による影響はパラボラ中心から離れた外周側で大きくなり、逆にセグメントが 180 度回転対称でない影響は外周側で小さくなる。これらを考え合わせると、セグメント回転による位相差分布のずれのアクチュエータによる逆補正値は、前出の 0.1 ~ $0.15\mu$m より 1 桁程度など小さくなると想定されると思われる。この量はギャップセンサーの読み出しノイズの典型量 10 ~ 20nm と同程度であることなどを考えると、シミュレータ中では無視してかまわない程度の量ではないかと考えられる。

### 3.3.4 セグメントシフト全体

セグメントシフト全体を補正するパラメータをまとめておく。前節からセグメントの回転に対応するアクチュエータ補正量は無視してかまわない程度の量と考えることから、X 方向・Y 方向へのセグメントの並進による影響に対応するアクチュエータ補正量である。

セグメントの併進量を X 方向・Y 方向について、それぞれ $\delta_x, \delta_y$ とすると

$$a_1 = \frac{y_1 \cos\phi}{(1+k)(R-(1+k)z)}\delta - \frac{\sin\phi}{1+k}\delta$$

$$a_2 = \frac{y_2 \cos\phi}{(1+k)(R-(1+k)z)}\delta - \frac{\sin\phi}{1+k}\delta + \frac{x_2}{R-(1+k)z}\delta$$

$$a_3 = \frac{y_2 \cos\phi}{(1+k)(R-(1+k)z)}\delta - \frac{\sin\phi}{1+k}\delta - \frac{x_2}{R-(1+k)z}\delta$$

である。

[7]回転原点より内側と外側での影響、つまり Y 軸をはさんだ影響の分布が本当に Y 軸に対して対称であるかは未確認。X 軸については鏡面のパラボラの中心が X 軸を通るなどの定義から明らか。