

# 分割主鏡シミュレーター IV — 原案・ソフトウェア設計

岡山新技術望遠鏡グループ

平成 22 年 9 月 15 日

## 目次

<b>1</b>	<b>概要</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>PSF の導出 — フーリエ光学</b>	<b>2</b>
2.1	開口の扱い	2
2.1.1	位相なし開口から出る球面波	2
2.1.2	波面における位相差	2
2.2	回折現象	2
2.2.1	近距離近似 — Fresnel 回折	3
2.2.2	遠距離近似 — Fraunhofer 回折	3
2.3	レンズ系の取り扱い	3
<b>3</b>	<b>PSF の導出 — 導出方法の検討</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>2次元離散フーリエ変換</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>実装</b>	<b>5</b>
5.1	分解能	5
5.2	セグメントギャップの反映	5
5.3	セグメントの基準位置からのずれによる位相への影響	5
5.3.1	セグメントのピストン移動	5
5.3.2	セグメントの平行移動	6
5.3.3	セグメントの回転	6
5.4	開口面での位相変動量の導出	6
5.5	鏡面形状の取り扱い	6
5.5.1	理想鏡面形状の定義	6
5.5.2	鏡材背面と平行な面上の移動による影響	7
5.5.3	セグメントの位置・サイズ	8
5.5.4	鏡面上にあるかないかの確認	8

## 1 概要

分割主鏡のシミュレータに、あるアクチュエーター駆動量(セグメント形状の理想形状からのずれ)において得られる PSF を出力できるオプションを追加する。

## 2 PSFの導出 — フーリエ光学

### 2.1 開口の扱い

#### 2.1.1 位相なし開口から出る球面波

球面波は  $A$  を複素振幅、 $r$  を球面波射出点からの距離、 $k$  を波数 ( $k\lambda = 2\pi$ ) とすると

$$\Psi = \frac{A}{r} \exp(ikr)$$

とあらわされる。

いま、ある平面  $(\xi, \eta)$  上 (の各点) で球面波が射出 (出射面) されているとする。このとき、垂線が一致し、原点が出射面の原点を通る垂線に乗るようなイメージ面上にある点  $(x, y)$  での波面は、 $(\xi, \eta)$  と  $(x, y)$  の距離を  $r$  として

$$u(x, y) = \frac{1}{i\lambda} A \iint_{\mathcal{V}} \frac{1}{r} \exp(ikr) d\xi d\eta$$

とあらわされる。

これに対して、射出されている部分だけで 1 となる  $G(\xi, \eta)$  を開口関数と定義すると

$$u(x, y) = \frac{1}{i\lambda} A \iint_{\mathcal{V}} \frac{1}{r} G(\xi, \eta) \exp(ikr) d\xi d\eta$$

である。

#### 2.1.2 波面における位相差

位相  $l$  だけずれた球面波は

$$\Psi = \frac{A}{r} \exp(i(kr + l)) = \frac{A}{r} \exp(ikr) \exp(il)$$

とあらわされる。よって、この球面波による  $(x, y)$  での波面は

$$u(x, y) = \frac{1}{i\lambda} A \iint_{\mathcal{V}} \frac{1}{r} (G(\xi, \eta) \exp(il)) \exp(ikr) d\xi d\eta$$

である。出射面で位相が異なる波面の場合、開口関数を変えるとよい。この場合、開口関数は複素値を取る。

### 2.2 回折現象

いま、2 平面間の距離を  $R$  とする。すると  $r$  は

$$r^2 = R^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

である。これを利用すると、上述の式は

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{A}{i\lambda} \iint_{\mathcal{V}} \frac{1}{r} G(\xi, \eta) \exp\left(ik\left(R^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\right)^{1/2}\right) d\xi d\eta \\ &= \frac{A}{i\lambda} \iint_{\mathcal{V}} \frac{1}{r} G(\xi, \eta) \exp\left(ikR\left(1 + \left(\frac{x - \xi}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{R}\right)^2\right)^{1/2}\right) d\xi d\eta \end{aligned}$$

となる。

### 2.2.1 近距離近似 — Fresnel 回折

開口サイズに比べて平面間距離が十分長く、かつ  $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \sim R\lambda$  程度であるとする。この場合、 $r \sim R$  と近似できる。

このとき

$$\begin{aligned} u(x, y) &\sim \frac{A}{iR\lambda} \iint_{\mathcal{V}} G(\xi, \eta) \exp\left(ikR + \frac{ik}{2R} \left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\right)\right) d\xi d\eta \\ &= -\frac{iA}{R\lambda} \exp(ikR) \iint_{\mathcal{V}} G(\xi, \eta) \exp\left(i\frac{\pi}{R\lambda} \left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\right)\right) d\xi d\eta \end{aligned}$$

と近似される。

### 2.2.2 遠距離近似 — Fraunhofer 回折

平面間距離が十分離れていて  $\xi^2 + \eta^2 \ll R\lambda$  である場合、イメージ面での分布は

$$\begin{aligned} u(x, y) &\sim -\frac{iA}{R\lambda} \exp(ikR) \iint_{\mathcal{V}} G(\xi, \eta) \exp\left(i\frac{\pi}{R\lambda} \left((x^2 + y^2) - 2(x\xi + y\eta)\right)\right) d\xi d\eta \\ &= -\frac{iA}{R\lambda} \exp(ikR(x^2 + y^2)) \iint_{\mathcal{V}} G(\xi, \eta) \exp\left(-i\frac{2\pi}{R\lambda} (x\xi + y\eta)\right) d\xi d\eta \end{aligned}$$

となる。

いま、 $u(x, y)$  と  $G(\xi, \eta)$  はそれぞれ 2 次元ユークリッド空間  $(x, y), (\xi, \eta)$  での可積分関数であるといえ、内積  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} = x\xi + y\eta$  が成立することから、この積分は 2 空間の間のフーリエ変換であるといえる。よって、遠方場における回折光パターンは、開口関数のフーリエ変換で表される。

## 2.3 レンズ系の取り扱い

薄肉・両球面のレンズを考え、開口・イメージ面について近軸近似が成立すると仮定する。レンズ系を図 1 と定義する。また、入射側の面を  $E_l$  レンズ R を  $R_1$ 、出射側の面を  $E'_l$  レンズ R を  $R_2$ 、レンズの焦点距離を  $f$  とする。

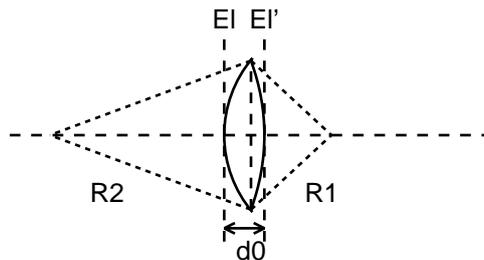


図 1: レンズ系概念図

任意  $(x, y)$  におけるレンズ肉厚を  $\Delta(x, y)$  であらわし、 $(0, 0)$  での値を  $\Delta_0 = \Delta(0, 0)$  とあらわすことにする。また、レンズの材質 (屈折率) を  $n$  とする。この場合の入射  $E_l$  と出射  $E'_l$  間の位相遅れ  $\Phi_{(x,y)}$  は

$$\Phi_{(x,y)} = kn\Delta(x, y) + k(\Delta_0 - \Delta(x, y)) = k\Delta_0 + k(n - 1)\Delta(x, y)$$

となる。つまり

$$E'_l = E_l \exp(ikn\Delta_0) \exp(ik(n - 1)\Delta(x, y))$$

とあらわされる。

球面レンズを仮定しているので

$$\begin{aligned}\Delta(x, y) &= \Delta_0 - R_1 \left( 1 - \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2} \right)^{1/2} \right) + R_2 \left( 1 - \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2} \right)^{1/2} \right) \\ &\sim \Delta_0 - R_1 \cdot \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R_1^2} + R_2 \cdot \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R_2^2} = \Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2f(n-1)}\end{aligned}$$

である。つまり、レンズ系は位相遅れとして

$$E'_l = E_l \exp(ikn\Delta_0) \exp\left(-i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right)$$

と働く。

入射開口  $G(\xi, \eta)$  の場所に焦点距離  $f$  レンズがある場合を考える。この場合のイメージ面での像は

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \frac{A}{i\lambda} \iint_{\mathcal{V}} G(\xi, \eta) \exp\left(ik(R^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^{1/2}\right) \cdot \text{const} \cdot \exp\left(-i\frac{k}{2f}(\xi^2 + \eta^2)\right) d\xi d\eta \\ &\sim \frac{A}{i\lambda} \iint_{\mathcal{V}} G(\xi, \eta) \exp(ikR) \exp\left(\frac{ik}{2R}((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2) - i\frac{k}{2f}(\xi^2 + \eta^2)\right) d\xi d\eta\end{aligned}$$

いま、 $R = f$  のところのイメージを考えると

$$= \frac{A}{i\lambda} \iint_{\mathcal{V}} G(\xi, \eta) \exp(ikR) \exp\left(-\frac{ik}{2f}(x\xi + y\eta)\right) d\xi d\eta$$

となり、frounhofer 回折での  $R$  を  $f$  とした表式と同じ。つまり、レンズ系での点像の分布関数は、瞳の分布関数のフーリエ変換である。

### 3 PSF の導出 — 導出方法の検討

仮定として、光学系の設計及び製造は完全であるとする。設計における像の広がりには収差の影響が回折限界 PSF よりも小さくなるように光学設計されているはずであり、製造のほうについても各素子に要求される製造誤差の仕様は同様に小さくなるように定められているので、これら仮定は問題ない。

ここで、簡単化のために光学系を M1 だけで代表させる。実際には M3 は単純な平面鏡であるので M1+M2 を代表させることになる。このとき、M1 への入射光は十分遠方からの波面で、それを焦点位置に結像させる光学系となる。反射系と透過系は前節の薄肉レンズを仮定している場合、場所により異なる位相遅れを引き起こす系として同じと解釈できるので置換可能である。(また、これは表式の上では単なる円形開口とした場合の frounhofer 回折と同じ。)

いま、M1 のある場所  $(\xi, \eta)$  における鏡面誤差が  $\tau(\xi, \eta)$  であったとする。これに対応する位相遅れ量は波長  $\lambda$  を利用して  $4\pi\tau(\xi, \eta)/\lambda$  である。

まとめると、位相がずれた分割主鏡を持つ望遠鏡の PSF は、主鏡の投影像と同じ開口における、分割主鏡の位相ずれ分を反映させた入射光に対する、望遠鏡の合成焦点距離だけ離れた位置での frounhofer 回折の PSF ということができる。

### 4 2次元離散フーリエ変換

2次元フーリエ変換は

$$F(u, v) = \iint_{\mathcal{V}} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

とあらわされ、離散化すると

$$F(u, v) = \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} f(x, y) \exp\left(-i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$

$$= \sum_{v_y} \left( \exp\left(-i2\pi \frac{v_y}{N}\right) \sum_{v_x} f(x, y) \exp\left(-i2\pi \frac{u_x}{M}\right) \right)$$

となる。

つまり、次元ごとに離散フーリエ変換をかければよい。<sup>1</sup>

## 5 実装

### 5.1 分解能

実装上では、開口をある空間分解能で離散化したデータを利用してフーリエ変換をかけることになる。逆にイメージ面上での像分解能は周波数の細かさ、つまり開口面で利用する面の広さに依存する。この分解能は、フーリエ変換の式の  $\exp()$  の項に依存し、 $\exp(i \cdot 2\pi) = 1$  であることから

$$-i \frac{2\pi}{R\lambda} (x\xi + y\eta) = \pm i \cdot 2\pi$$

である。いま、平行な  $(x, y), (\xi, \eta)$  を考えると

$$\frac{|(x, y)| \cdot |(\xi, \eta)|}{R\lambda} = 1$$

と表すことができ、イメージ面での角度分解能  $\theta$  は  $\theta = |(\xi, \eta)| / R$  であるので

$$\theta = \frac{|(\xi, \eta)|}{R} = \frac{\lambda}{|(x, y)|}$$

となる。離散フーリエ変換の対応関係から、開口面での全サイズとイメージ面上での単位サイズ、開口面での単位サイズとイメージ面上での全サイズが対応する。つまり、波長  $\lambda$  を開口面の定義全領域サイズで割ったものがイメージ面での角度分解能になる。

5cm 分解能 1024x1024 の開口面の場合、イメージ面の分解能は波長 1 $\mu$ m で

$$\frac{1\mu\text{m}}{5\text{cm} \cdot 1024} \times (2.062648e + 8\text{mas/rad}) = 4.0286\text{mas}$$

となる。

### 5.2 セグメントギャップの反映

セグメントは理想状態の場合に一つの滑らかにつながる曲面を構成する。しかしながら、セグメントの間のギャップは入射開口に含まれない。この部分は入射開口に対してマスクをかけることで解決する。

ただし、セグメントギャップ 2 ~ 4mm に対して、開口面での空間分解能が 5 ~ 10 cm とかになり、セグメントギャップが一桁小さいので実際にきちんと反映させるのは困難ではある。

### 5.3 セグメントの基準位置からのずれによる位相への影響

#### 5.3.1 セグメントのピストン移動

セグメントのピストン移動を位相に反映させるときには、セグメント自体の基準位置における傾きと 3 点の非均一移動による傾きの 2 点を考慮する必要がある。

基準位置におけるピストン移動の支持面(背面)の傾きは、内周で 4.8067°、外周で 8.7456° である。この支持面を平行に 1mm 移動させたときの移動量を考えると、それぞれ開口面の平面内移動が内周は  $1\text{mm} \cdot \sin(4.8067^\circ) \sim 0.0838\text{mm}$  外周は  $1\text{mm} \cdot \sin(8.7456^\circ) \sim 0.152\text{mm}$  主軸方向の移動量が内周は  $1\text{mm} \cdot \cos(4.8067^\circ) \sim 0.99648\text{mm}$  外周は  $1\text{mm} \cdot \cos(8.7456^\circ) \sim$

<sup>1</sup> 離散フーリエ変換が直交基底をなしていることから当然とは言える。

0.9884mm となる。ピストン移動の最大量は 1mm であるので、開口面での平面内移動は分解能に比べ十分小さく無視できる。位相に直結する主軸方向の移動量の減少は内周で 0.4%、外周で 1.1% であり、これは変化しない固定パラメータとして考慮すべき。

ピストン移動 3 点が非均一に動くことによる影響は、セグメントの基準位置に対しての相対傾きが最大でも 0.2 度であることから、光軸に垂直な面内での移動は  $(1 - \cos(0.2^\circ)) \cdot R(700\text{mm}) \sim 4.2\mu\text{m}$  程度となり無視できる。また、同様に位相に効く主軸方向の移動についても  $\cos(0.2^\circ) \cdot 1\text{mm} \sim 0.999993\text{mm}$  となり移動量が減少する効果は無視できる。

よって、セグメントアクチュエーターのピストン移動による影響は、単純に鏡面上の各点における移動量による位相変化に対し、内周・外周にそれぞれ定義される変換係数を考えるだけでよい。

### 5.3.2 セグメントの平行移動

セグメントの平行移動は、鏡材の支持面上での移動と言い換えることができる。つまり、内周で  $4.8067^\circ$ 、外周で  $8.7456^\circ$  傾いた面内の平行移動である。セグメントの平行移動はセグメント間ギャップ量  $2 \sim 4\text{mm}$  が最大移動量で、開口面内には内周で 0.99648 倍、外周で 0.9884 倍の移動量、主軸方向には内周で 0.0838 倍、外周で 0.152 倍の移動量に加わることになる。開口面内の移動量は想定する分解能の一桁小さい値であり無視しても大丈夫であるといえる。

よって、主軸方向への移動量のみを考慮する。主軸方向への移動量は、平行移動したセグメント上での同じ点同士ではなく、絶対座標における同じ点同士を比較する必要がある。この場合、2 点間の背面に対する鏡面の移動量を考えることになる。この移動量に対してアクチュエーターによるピストン移動の影響を検討したと同じ係数をかけて位相のずれ量をもとまる。(これについては、後ほど鏡面の関数を参照しながら検討する。)

また、平行移動による開口面での開口パターンの変化は同様に無視できる。

### 5.3.3 セグメントの回転

セグメントのセグメント中心点に対する回転は光軸の平行ずれとなり、このシミュレーションでは PSF に反映させられない。よって、セグメントの回転によるセグメント同士の光軸の平行ずれは今回は取り扱わない。

なお、セグメントの回転による平行移動量については、その最大移動量はセグメントの平行移動とほぼ同じである。これに関しては、平行移動として取り扱い、回転のパラメータは入れない。

## 5.4 開口面での位相変動量の導出

開口面での位相変動量は、座標系  $(x, y)$  は M1 を平面に投影した座標系となる。つまり、セグメント背面に乗った座標系からは座標変換する必要がある。

この座標系に対して導出する必要がある位相変化量は以下の量になる。

ピストン 3 点による駆動量に対して  $\cos \theta$  をかけた値

平行・回転 背面に対する鏡面の相対ずれに対して  $\cos \theta$  をかけた値

## 5.5 鏡面形状の取り扱い

ここでは、鏡材の開口面上での移動による影響を調べるために、鏡面の形状から状態について考える。

### 5.5.1 理想鏡面形状の定義

鏡面形状は、主軸を  $y$  軸とし主軸に垂直な平面内での半径  $R$  を利用して

$$(1 + k)y^2 - 2Ry + r^2 = 0, R = 10000(\text{mm})/k = -1.034609$$

で定義されている。ただし、原点は主軸と鏡面の交点である。

### 5.5.2 鏡材背面と平行な面上の移動による影響

開口面・主軸による座標系を  $p$  座標系、あるセグメントの中心点を原点とし鏡材背面を基準 (原点で背面と鏡面は接する) とする座標系を  $m$  座標系とする。この2つの座標系の関係は図2とあらわされる。

座標変換は、二つの  $z$  軸のなす角  $\theta_{mp}$  と、 $m$  座標系原点の  $p$  座標系での  $z$  軸の値  $r_c$  を利用して

$$(x, y, z)_p^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{mp} & \sin \theta_{mp} \\ 0 & -\sin \theta_{mp} & \cos \theta_{mp} \end{pmatrix} (x, y, z)_m^t + (0, y_{mp}, r_c)^t$$

$$\begin{cases} x_p = x_m \\ y_p = y_m \cos \theta_{mp} + z_m \sin \theta_{mp} + y_{mp} \\ z_p = -y_m \sin \theta_{mp} + z_m \cos \theta_{mp} + r_c \end{cases}$$

となる。

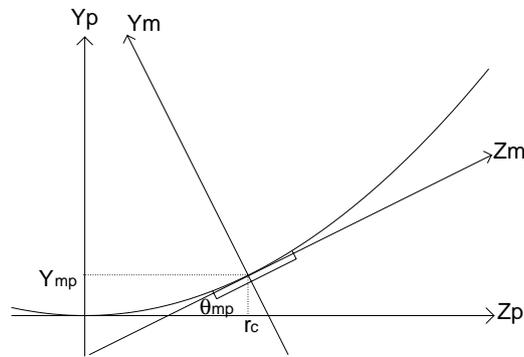


図 2: 座標系の定義とその関係

これについて、ある  $m$  座標系の  $(x, z)$  平面上の点  $(x', 0, z')_m$  に対して、 $p$  座標系での座標は

$$(x', z' \sin \theta_{mp} + y_{mp}, z' \cos \theta_{mp} + r_c)_p$$

となる。逆に  $p$  座標系の  $(x, z)$  平面上の  $(x, 0, z)_p$  に対しては

$$(x, -z \sin \theta_{mp} + r_c \sin \theta_{mp} - y_{mp} \cos \theta_{mp}, z \cos \theta_{mp} - y_{mp} \sin \theta_{mp} - r_c \cos \theta_{mp})_m$$

である。また、 $m$  座標系の  $(x, z)$  平面上、つまりセグメントの背面上の点に対して、同じ  $(x, z)$  を持つ鏡面上の点を対応する点として定義する。これは、背面から法線を伸ばして鏡面と交わったときの点である。

背面に平行なずれ  $(\delta x', \delta z')$  は  $m$  座標系にて  $(x, z)$  に  $(-\delta x', -\delta z')$  を加えることに相当するが、これを  $p$  座標系に変換すると

$$(\delta x, \delta y, \delta z)_p = (-\delta x', \delta z' \sin \theta_{mp}, -\delta z' \cos \theta_{mp})_p$$

となる。鏡面の式からこのずれが発生したときの  $(x, z)_p$  に対する鏡面位置は

$$y = (1+k)^{-1} \left( R - \left( R^2 - (1+k) \left( (x - \delta x)^2 + (z - \delta z)^2 \right) \right)^{1/2} \right) + \delta y$$

となる。つまり、実際の主軸方向へのずれは

$$\Delta y = (1+k)^{-1} \left( R - \left( R^2 - (1+k) \left( (x - \delta x')^2 + (z - \delta z' \cos \theta_{mp})^2 \right) \right)^{1/2} \right) - \delta z' \sin \theta_{mp} - (1+k)^{-1} \left( R - \left( R^2 - (1+k) (x^2 + z^2) \right)^{1/2} \right)$$

である。

### 5.5.3 セグメントの位置・サイズ

セグメント位置・サイズはセグメントの背面の中央点 (z 軸方向中心点、x 軸方向は z = 0 上の内縁・外縁の中央点) がセグメント中心と定義され、その点での R は主軸からの (x,z) 平面上の距離に一致する。つまり、内周セグメントの中心点は  $r = 841$ 、外周セグメントの中心点は  $r = 1539$  である。それ以外を含め、まとめると表 1 となる。

表 1: セグメント形状

	$\theta_{mp}$ (°)	$r_c$ (mm)	$y_{mp}$ (mm)
内周	4.8067	841.0	35.361886
外周	8.7456	1539.0	118.401791

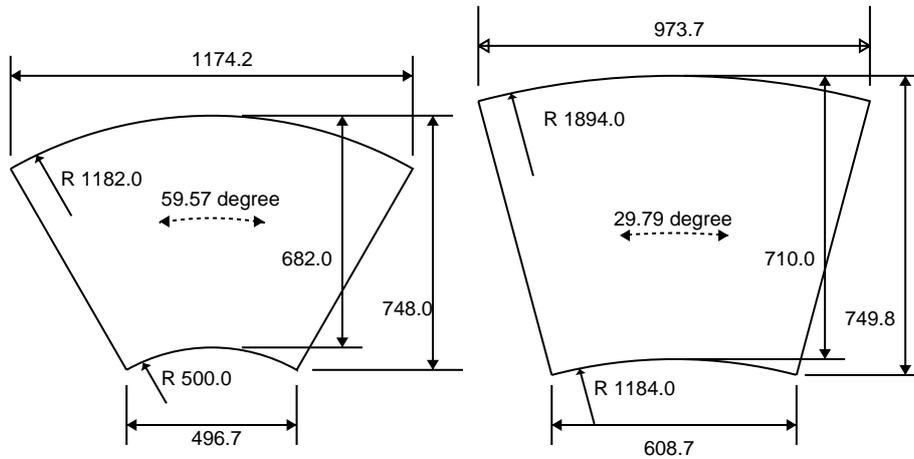


図 3: セグメントサイズ

### 5.5.4 鏡面上にあるかないかの確認

ある  $(x, z)_p$  が鏡面上にあるかないかの確認について、簡単化のために内縁・外縁ともに円であると近似する。また、へりの辺については主軸を通る半径方向であると近似する。内縁・外縁について、内周と外周それぞれの 4 端点で R を求めると表 2 のようになる。よって、内周を  $R = 501.2 \sim 1181.4$ 、外周を  $R = 1188.3 \sim 1890.3$  と近似する。

表 2: セグメントの投影半径

		$(x, z)_m$	$(x, z)_p$	R
内周	内縁中央	(0.0, -341.0)	(0.0, 501.1993)	501.1993
	内縁端	(248.35, -407.0389)	(248.35, 435.3927)	501.2430
	外縁中央	(0.0, 341.0)	(0.0, 1180.8007)	1180.8007
	外縁端	(587.1, 184.8838)	(587.1, 1025.2336)	1182.0000
外周	内縁中央	(0.0, -355.0)	(0.0, 1188.1275)	1188.1274
	内縁端	(304.35, -394.7854)	(304.35, 1148.8047)	1188.4364
	外縁中央	(0.0, 355.0)	(0.0, 1889.8725)	1889.8725
	外縁端	(486.85, 291.3587)	(486.85, 1826.9711)	1890.7264