分割主鏡シミュレータ II — 分割鏡動作パラメータの把握 II

岡山新技術望遠鏡グループ

平成 22 年 5 月 31 日

目 次

1 概要 1

2 特異値と特異ベクトル 1

2.1 数学的定義 1

2.2 特異ベクトルと動作モード 2

2.3 擬似逆行列 2

3 分割主鏡の変換行列における物理的意味 3

1 概要

分割鏡動作パラメータの把握 I では、分割主鏡の動作パラメータについてアクチュエーター制御量からギャップセンサー読み出し量への変換行列を求め、その変換行列の固有値の分布を見ることでギャップセンサーの配置の最適化が行えないかどうかを検討した。

ここでは、それを発展させ、変換行列の固有値に対する固有ベクトルを導出することで、どのようなセグメントの変形モードが退化している、すなわち定義したギャップセンサー配置からは判別できないのかということについて検証できないか検討する。

2 特異値と特異ベクトル

2.1 数学的定義

m 行 n 列 $(m > n)$ の要素を持つ行列 $\mathbf{A}$ に対し、その共役転置行列 (随伴行列)$\mathbf{A}^*$ をかけた $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ の n 個の固有値の平方根が、行列 $\mathbf{A}$ の特異値と呼ばれる。いま、$\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ は随伴行列を掛けているため半正定値エルミート行列であるので、行列 $\mathbf{A}$ の特異値は実数かつ非負である。逆に、$\mathbf{AA}^*$ の m 個の特異値は大きなほうから n 個は $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ のものと一致し、残りはすべて 0 となる。

この特異値に対して、$\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ の n 個の n 次元の固有ベクトルは右特異ベクトル、$\mathbf{AA}^*$ の n 個の m 次元の固有ベクトルは左特異ベクトルと呼ばれる。また、これらの特異ベクトルはそれぞれ互いが直交するように選択することと、一般性を失うことなく単位ベクトルとして選択することができる。いま、固有値 $\sigma_1^2, \cdots, \sigma_n^2$ に対応する右特異ベクトルを $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$、左特異ベクトルを $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ とする。これらについて、$\mathbf{Av}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$、$\mathbf{A}^*\mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i$ が成立する。

いま、すべての i について

$$\mathbf{A}{\mathbf{v}_i}^T = \sigma_i {\mathbf{u}_i}^T$$

であるので

$$\mathbf{A}\left({\mathbf{v}_1}^T\ ,\ {\mathbf{v}_2}^T\ \cdots\ ,\ {\mathbf{v}_n}^T\right) = \left(diag(\sigma_i)\right)\left({\mathbf{u}_1}^T\ ,\ {\mathbf{u}_2}^T\ \cdots\ ,\ {\mathbf{u}_n}^T\right)$$

である。ここで

$$\mathbf{V} = \left(\mathbf{v}_1{}^T\ ,\ \mathbf{v}_2{}^T\ \cdots\ ,\ \mathbf{v}_n{}^T\right)\ ,\ \mathbf{U} = \left(\mathbf{u}_1{}^T\ ,\ \mathbf{u}_2{}^T\ \cdots\ ,\ \mathbf{u}_n{}^T\right)$$

とすると、$\mathbf{V}$ は nn 行列、$\mathbf{U}$ は mn 行列となり、上述のように $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_i$ が互いに直交する単位ベクトルとなるように選択しておくと、行列 $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$ は正規直交行列である。よって、上記の式は

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot (diag(\sigma_i)) \cdot \mathbf{V}^T$$

とかける。また、行列 $\mathbf{V}$ は正規直交行列であるので、座標系の回転を示すともいうことができる。

2.2 特異ベクトルと動作モード

特異ベクトルを互いに直交する単位ベクトルとして定義していることから、任意の n 要素ベクトル $\mathbf{x}$ は n 個の n 要素の右特異ベクトルにより

$$\mathbf{x} = \sum_{\forall i} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

と分解できる。ここで、上述の特異ベクトルの性質から $\mathbf{x}$ へ $\mathbf{A}$ をかける操作は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \sum_{\forall i} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{\forall i} \alpha_i \sigma_i \mathbf{u}_i$$

とあらわされる。つまり、それぞれの特異ベクトルは一つのある種の動作モードを代表しているともいうことができる[1]。

ここで、ベクトル $\mathbf{v}$ と $\mathbf{u}$ は単位ベクトルであるので、$\alpha_i \sigma_i \mathbf{u}_i$ の大きさは、特異ベクトル $\mathbf{v}_i$ に対応する特異値 σ_i に依存することになる。つまり、特異値自体が小さな特異ベクトルに対応する動作が全体に及ぼす影響は小さい。そして、行列 $\mathbf{A}$ に対し、$0 < k < n$ である整数 k について同じ固有ベクトルを持つが階数が k となる行列 $\mathbf{A}_k$ を定義する。いま、この二つ行列の差 $\mathbf{X} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_k$ の Frobenius norm は

$$\|\mathbf{X}\|_F = \sqrt{\sum_{\forall i,j} X_{ij}^2}$$

と定義され、Frobenius norm を最小化する $\mathbf{A}_k$ について考える。上述の特異ベクトルと特異値の関係からも直感的にわかる Eckart and Young による定理

$$min_{Z|rank(Z)=k} \|A - Z\|_F = \|A - A_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} {\sigma_i}^2}$$

から、最も大きな特異値から k 個を残し、残りすべてを 0 とした行列が $\mathbf{A}_k$ であることがわかる。

以上から、行列 $\mathbf{A}$ の特異値と特異ベクトルについて、それぞれの特異ベクトルはある種の行列が示す動作モードをあらわすことと、行列 $\mathbf{A}$ の動作において小さな特異値 σ_i とそれに対応する特異ベクトルの影響は小さく、かつ行列 $\mathbf{A}$ をある階数 k までで近似する際には、大きいほうから $k+1$ 個め以上の特異値を 0 とする近似が最適であることがわかった。

2.3 擬似逆行列

いま、前節までのように分解[2] された行列に対して、逆変換を考える。

まず、単純に逆行列の表式を考えると、$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{V}\mathbf{V}^T = I$ であり、$diag(\sigma_i)$ の逆行列は $diag({\sigma_i}^{-1})$ であるので

$$\mathbf{U}\left(diag\left(\sigma_i\right)\right)\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} = I$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\left(diag\left({\sigma_i}^{-1}\right)\right)\mathbf{U}^T$$

[1]数学的には、特異ベクトルの線形結合は不変部分空間を張るようなベクトルを構成している。

[2]SVD; Singular Value Decompositions

と考えることができる。

いま、この $diag\left(\sigma_i{}^{-1}\right)$ について、非常に小さな特異値 σ_i の取り扱いを検討する。$\mathbf{A}^{-1}$ に対して前節と同様に Frobenius norm を考えると、$\sigma_i{}^{-1}$ が大きいほうから、つまり σ_i が小さいほうから大きな影響を及ぼしているということができる。ここで、すべての σ_i が有意な値を持っている場合はそのままでいいと考えられるが、たとえば最も大きな σ_0 に比較して計算誤差のレベルでしかない σ_j は本来ならばまったく影響を及ぼさない特異値・特異ベクトルであるにもかかわらず、$\mathbf{A}^{-1}$ では非常に大きな影響を及ぼす結果になり、行列の物理的な意味からは外れる振る舞いであるといえる。

つまり、逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ について、行列 $\mathbf{A}$ の非常に小さな特異値 σ_i については $\sigma_i{}^{-1} = 0$ と置き換える方が物理的に意味がある操作と考えられる。

3　分割主鏡の変換行列における物理的意味

分割主鏡シミュレータでは、アクチュエーターの制御パラメータから、ギャップセンサーの読み出し値への変換行列を作成し、それを利用することですべての動作を表現している。

上述のように変換行列の SVD による表現が判明したとき、その特異ベクトルはアクチュエーターをどう制御するかに対応するもの (右特異ベクトル) と、ギャップセンサーの読み出し値がどう変動するかに対応するもの (左特異ベクトル) の二つが求められることとなる。そして、アクチュエーターをどう制御するかに対応する特異ベクトルは、ギャップセンサーの読み出し値を参照することで行う制御においてアクチュエーター動作の固有モードに対応する。

つまり、アクチュエーターによる主鏡セグメント位置あわせの制御は、変換行列の特異ベクトルを固有モードとし、固有モード間の重要性は対応する特異値の大きさに依存するということができる。よって、ギャップセンサーの配置は、計算誤差レベルの特異値を減らし、かつ可能な限り全特異値の値が平均化されるようなものであることが望ましいと示唆される。