運動学

http://www.kusastro.kyoto-u.ac.jp/〜iwamuro/LECTURE/KIN/

極座標：$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$, $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$ より

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r\mathbf{e}_r \\ \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

自然座標：$\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\theta}\mathbf{e}_n = (v/\rho)\mathbf{e}_n$ より

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v\mathbf{e}_t \\ \mathbf{a} &= \dot{v}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n\end{aligned}$$

曲率半径 ρ を求める時は $\dot{\mathbf{e}}_t$ または $a_\perp$ を考える

保存則

E 保存：運動方程式の両辺に $\mathbf{v}$ をかけて t 積分

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}dt = \int m\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}dt$$

$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ より

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int m\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}$$

ポテンシャルを U、積分定数 (全 E) を E として、

$$-U + E = \frac{1}{2}mv^2$$

運動方程式は t の 2 階微分だが E 保存則は 1 階微分

L 保存：$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ 両辺を t 微分

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p} + \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}$$

$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \parallel \mathbf{p}$ より第 1 項=0、$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ なので

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \mathbf{N}$$

$\mathbf{N} = \mathbf{0}$ ならば、$\mathbf{L} =$ 一定となる。円柱座標では、
$\mathbf{L} \equiv r\mathbf{e}_r \times m(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z$ を t 微分して

$$\dot{\mathbf{L}} = mr(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_z = rF_\theta\mathbf{e}_z = \mathbf{N}$$

保存力

保存力の条件	微分形	積分形
ポテンシャル	$\mathbf{F} = -\nabla U$	$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -U$
渦	$\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$	$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$

$\nabla\cdot\nabla = \triangle$：ラプラシアン
$\nabla\times\nabla = \mathbf{0}$
$\nabla A = \mathbf{grad}A$：傾斜 (ベクトル、「勾配」)
$\nabla\cdot\mathbf{A} = \mathrm{div}\mathbf{A}$：湧き出し (スカラー、「発散」)
$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{rot}\mathbf{A}$：渦 (ベクトル、「回転」)
$\nabla(A+B) = \nabla A + \nabla B$
$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$
$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$
$\nabla(AB) = B\nabla A + A\nabla B$
$\nabla\cdot(A\mathbf{B}) = \nabla A\cdot\mathbf{B} + A\nabla\cdot\mathbf{B}$
$\nabla\times(A\mathbf{B}) = \nabla A\times\mathbf{B} + A\nabla\times\mathbf{B}$
ガウスの発散定理：$\int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV$
ストークスの定理：$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$
$\nabla r = \mathbf{e}_r$
$\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$ (2 次元の場合は 2)
$\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$　　　　($\nabla = \partial/\partial\mathbf{r}$ と書く場合あり)

その他

双曲線関数	三角関数
$\cosh\theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2$	$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$
$\sinh\theta = (e^\theta - e^{-\theta})/2$	$\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$
$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$(\cosh\theta)' = \sinh\theta$	$(\cos\theta)' = -\sin\theta$
$(\sinh\theta)' = \cosh\theta$	$(\sin\theta)' = \cos\theta$
$(\tanh\theta)' = 1/\cosh^2\theta$	$(\tan\theta)' = 1/\cos^2\theta$
$= 1 - \tanh^2\theta$	$= 1 + \tan^2\theta$

↑ 加法定理等の公式は全て $\sin^2$ の符号反転と同形

置き替えパターンなど

$a^2 - x^2 \Rightarrow x = a\sin\theta, a\cos\theta, a\tanh\theta$
$a^2 + x^2 \Rightarrow x = a\tan\theta, a\sinh\theta$
$x^2 - a^2 \Rightarrow x = a\cosh\theta$
$a + bi = re^{i\theta}$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\tan\theta = b/a$