減衰振動

http://www.kusastro.kyoto-u.ac.jp/~iwamuro/LECTURE/KIN/

粘性抵抗の働く振動の運動方程式より、

$$F = ma = -kx - 2hv$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$
$$(\text{但し、}\gamma \equiv h/m,\ \omega_0 \equiv \sqrt{k/m})$$

という斉次微分方程式が得られる。
この解を $x = Ce^{\lambda t}$ と置くと、

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + {\omega_0}^2 = 0$$

$$\lambda = \lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}$$

i) $\gamma < \omega_0$ (粘性小) の場合、$\omega^2 = {\omega_0}^2 - \gamma^2$ として

$$\lambda = -\gamma \pm i\omega$$

$$x = e^{-\gamma t}(Ce^{i\omega t} + \overline{C}e^{-i\omega t})$$
$$= ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta)$$

振幅が指数関数的に減少する状態となる。
この状態を **減衰振動** という。

ii) $\gamma > \omega_0$ (粘性大) の場合、$\sigma^2 = \gamma^2 - {\omega_0}^2$ として

$$\lambda = -\gamma \pm \sigma$$

$$x = C_+ e^{-(\gamma-\sigma)t} + C_- e^{-(\gamma+\sigma)t}$$

第 2 項は早く収束し、収束度は第 1 項で決まる。
この状態を **過減衰** という。

iii) $\gamma = \omega_0$ の場合、$x = fe^{\lambda t} = fe^{-\gamma t}$ で書き直し、

$$\dot{x} = (\dot{f} - \gamma f)e^{-\gamma t}$$
$$\ddot{x} = (\ddot{f} - 2\gamma\dot{f} + \gamma^2 f)e^{-\gamma t}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \ddot{f}e^{-\gamma t} = 0$$

$$x = e^{-\gamma t}(at + b)$$

粘性抵抗で最も早く振動を収束できる状態。
この状態を **臨界減衰** という。

次に、強制的な加速度 $f_0 \sin\Omega t$ が加わる場合を考える。

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = -if_0 e^{i\Omega t}$$

ここで、$\mathrm{Re}(-if_0 e^{i\Omega t}) = f_0 \sin\Omega t$ であり、この非斉次方程式の特殊解を $x = Ce^{i\Omega t}$ と予想して代入する。

$$(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + {\omega_0}^2)C = -if_0$$

() 内の複素数を極座標で表すと、

$$({\omega_0}^2 - \Omega^2) + 2i\gamma\Omega = \sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}\ e^{i\varepsilon}$$

$$\tan\varepsilon = \frac{2\gamma\Omega}{{\omega_0}^2 - \Omega^2},\quad (0 \leqq \varepsilon \leqq \pi)$$

となるので、これで C を求めると、

$$C = \frac{-if_0}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}\ e^{-i\varepsilon}$$

よって特殊解は、

$$\mathrm{Re}(x) = \frac{f_0}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}\ \sin(\Omega t - \varepsilon)$$

これに左 i)~iii) の一般解のどれかを合わせたものが解となるが、t が十分に大きくなると上記特殊解のみが残る。振幅が極大となる状態 ($\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ で振幅 $f_0/(2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})$) を **共振 (共鳴)** という。

$\gamma = 0$ かつ $\Omega = \omega_0$ の場合は振幅が発散するが、$x = Cte^{i\omega_0 t}$ と置いて書き直すと、

$$\dot{x} = C(1 + i\omega_0 t)e^{i\omega_0 t}$$
$$\ddot{x} = C(2i\omega_0 - {\omega_0}^2 t)e^{i\omega_0 t}$$
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = -if_0 e^{i\omega_0 t}$$
$$2i\omega_0 Ce^{i\omega_0 t} = -if_0 e^{i\omega_0 t}$$
$$C = -\frac{f_0}{2\omega_0}$$

よって特殊解は、

$$\mathrm{Re}(x) = -\frac{f_0 t}{2\omega_0}\ \cos(\omega_0 t)$$
$$= \frac{f_0 t}{2\omega_0}\ \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$$

粘性抵抗のない共振では振幅は時間に比例して増大し、運動の位相は外力の位相に対し $\pi/2$ 遅れる。