中心力場での運動

http://www.kusastro.kyoto-u.ac.jp/~iwamuro/LECTURE/KIN/

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E$$

を極座標で表すと、

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)^2 + U = E$$

$L = mr^2\dot{\theta}$ で $\dot{\theta}$ を消去、$U = k/r$ として、

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} = E$$

(第 2 項：遠心ポテンシャル) $u = 1/r$ とおくと、

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{L}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

これで時間微分を θ についての微分に変換できる。

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 + ku = E$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= \frac{2mE}{L^2} - u^2 - \frac{2km}{L^2}u \\ &= \left(\frac{2mE}{L^2} + \frac{k^2m^2}{L^4}\right) - \left(u + \frac{km}{L^2}\right)^2\end{aligned}$$

第一括弧を A^2、第二括弧の中を $\tilde{u}$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\theta} = \pm\sqrt{A^2 - \tilde{u}^2}$$

$\tilde{u} = A\cos\varphi$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\theta} = -A\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = \pm A\sin\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm\theta + C$$

$C = 0$ とすると、結局、$\tilde{u} = A\cos\theta$ となり、

$$u + \frac{km}{L^2} = \pm\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{k^2m^2}{L^4}}\cos\theta$$

2 次曲線の極座標表示

$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

$$u - \frac{1}{\ell} = \frac{\varepsilon}{\ell}\cos\theta$$

と係数比較して (復号は $\varepsilon \geqq 0$ となる方を選択)

$$\ell = -\frac{L^2}{km} \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{2L^2E}{k^2m} + 1}$$

を得る。ℓ は L のみで決まる。$\varepsilon \neq 1$ の場合、

$$a = \left|\frac{\ell}{1 - \varepsilon^2}\right| = \left|\frac{k}{2E}\right|$$

$$b = a\sqrt{|1 - \varepsilon^2|} = \sqrt{\frac{L^2}{2m|E|}} = \sqrt{\frac{aL^2}{|k|m}}$$

となる。a は E のみで、b は E, L で決まる。

軌跡が楕円になる場合 ($E < 0$ の場合)、

周期を T とすると、面積速度は

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m}\ \left(= \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right)$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{|k|}{4\pi^2m}\ \left(= \frac{GM}{4\pi^2}\right)$$

これはケプラーの第三法則である。

また、軌跡が双曲線になる場合 ($\varepsilon > 1$ すなわち $E > 0$ の場合)、散乱角を χ とすると、

$$\tan\frac{\chi}{2} = \frac{a}{b} = \frac{|k|}{2Eb}\ \left(= \frac{|k|}{mv_0^2b}\right)$$

$$b = \frac{|k|}{2E}\frac{1}{\tan(\chi/2)}\ \left(= \frac{|L|}{mv_0}\right)$$

(b：衝突パラメータ) 両辺を微分して、

$$\begin{aligned}\mathrm{d}b &= \frac{|k|}{4E}\frac{-1}{\tan^2(\chi/2)}\frac{\mathrm{d}\chi}{\cos^2(\chi/2)} \\ &= -\frac{|k|}{4E}\frac{\mathrm{d}\chi}{\sin^2(\chi/2)}\end{aligned}$$

微分断面積 $\mathrm{d}\sigma$ は、

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma = b\mathrm{d}\phi|\mathrm{d}b| &= \frac{k^2\mathrm{d}\phi}{8E^2}\frac{\cos(\chi/2)\mathrm{d}\chi}{\sin^3(\chi/2)} \\ &= \frac{k^2}{16E^2}\frac{\mathrm{d}\phi\sin\chi\,\mathrm{d}\chi}{\sin^4(\chi/2)} \\ &= \frac{k^2}{(4E)^2}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\sin^4(\chi/2)}\end{aligned}$$

これをラザフォード散乱の微分断面積と呼ぶ。