２００３年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

[redacted]

（ 200 点 ）

［ 時間　　2 時間 ］

注意　1．　問題は６頁、４問題である。
　　　2．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　3．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　4、　問題用紙は持ち帰ること。

I

積分

$$I = \int_0^2 dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(x-y)^2 + 2(x+y) + 1}}$$

を計算する。以下の問に答えよ。

問 1. xy 平面上の領域 $D: 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq x$ (a はある実数) を、

$$T:\ x = u(1+v),\ y = v(1+u)\ (u, v \geq 0)$$

によって変換する。この変換 T によって領域 D は uv 平面上のどういう領域に変換されるか。図示して答えよ。

問 2. 連続な関数 $f(x,y)$ の領域 D における積分に関して変換 T を行なう。このとき

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^b dv \int_v^{a/(1+v)} f(u(1+v), v(1+u))\ (u+v+1)du$$

が成り立つことを確かめ、b の値を求めよ。

問 3. 変換 T を用いて I の値を求めよ。

II

$L(t)$ は $N\times N$ 対称行列, $B(t)$ は $N\times N$ 反対称行列である。t は時間を表す。たとえば、$N=3$ のとき、L と B は実関数 $a_n(t), b_n(t)$ $(n=1,2,3)$ を用いて

$$L=\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & a_3 \\ a_1 & b_2 & a_2 \\ a_3 & a_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & a_3 \\ a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & a_2 & 0 \end{pmatrix},$$

のように表される。行列 $L(t)$ は非線型発展方程式

$$\frac{dL}{dt}=BL-LB \tag{1}$$

を満たす。方程式 (1) は Lax の形式と呼ばれる。格子を伝搬する非線型波動ソリトンの運動方程式はこの形式で書くことができる。

$L(t)$ の固有値が時間に関して不変であることを以下の手順で示そう。

問1． 行列 $U(t)$ は

$$\frac{dU}{dt}=BU \tag{2}$$

に従うものとする。初期に

$$U(0)=I \tag{3}$$

であれば、$U(t)$ は常にユニタリーである、すなわち、常に

$$U(t)U^T(t)=I \tag{4}$$

が成り立つことを示せ。ここで I は単位行列、添え字 T は転置行列を意味する。

問 2.

$$U^T(t)L(t)U(t)=L(0) \tag{5}$$

であることを示せ。

$L(t)$ の固有関数を $N \times 1$ 行列 $\phi(t)$、固有値を $\lambda(t)$ とする。

$$L(t)\phi(t) = \lambda(t)\phi(t). \tag{6}$$

$L(t)$ は実対称行列であるから固有値 $\lambda(t)$ は実数である。

問 3.

$$\phi(t) = U(t)\phi(0), \tag{7}$$

ならば、

$$\lambda(t) = \lambda(0), \tag{8}$$

であることを示せ。

Ⅲ

次の文章を読んで、問１から問３の問題の答えを、途中の計算式および数値計算の過程などとともに解答用紙に書け。数値の答えは、誤差がおおむね１０％以内になるように計算して求めること。

ヘリウムガスを詰めた気球に、観測装置を付けて放球する時の気球の上昇運動について考えてみよう。

科学観測に用いられる気球は、厚さ０．０４mm位の薄いポリエステル膜等のような一種のプラスティックの薄膜が用いられる。以下の問題においては膜は、ガスの圧力がかかっても伸び縮みはしないものとする。また、膜$1\,m^2$あたりの重量は、４０ｇとし、そのほかの吊り下げ用のひも類の重量は無視してよいものとせよ。

実験に用いる気球は、完全に膨らんだ状態で半径１０ｍの球状になるものとする。

問１． 放球時には、気球には、完全に膨らむ状態までヘリウムガスを入れないで、重さが１８０ｋｇの観測装置を吊り下げた状態で正味の浮力Ｆが３５ｋｇ重になるようにガスを充填するものとすると、何m^3 のヘリウムガスを気球に入れておけば良いか計算せよ。

ただし地上で、２０℃のときの１気圧の空気の密度は、$1\,m^3$ あたり、1.２０５ｋｇ、ヘリウムの密度は、$1\,m^3$ あたり0.１６６ｋｇである。

問２． 気球が放球されて上昇していく運動を記述する気球の運動方程式について考察する。ここでは、運動の水平方向の成分は無視する。

a) 速度ｖで上昇する気球に対する空気抵抗の力：f_aは、近似的に、$f_a=\xi\cdot v$ とかけるものとして、放球直後の運動方程式を書け。

注：空気抵抗の係数ξという量は、一般には気圧と気球の上面の表面積に依存するが、ここでは、放球後しばらくの間はξ一定であると仮定せよ。

b) このような条件のもとでは、放球した気球は、しばらくするとほぼ一定の速度になって上昇して行く。その理由を運動方程式とその解の考察に基づいて説明せよ。

また、その場合、一定の速度になってから上昇速度が測定され、約１０ｍ／ｓであることがわかったとする。放球後、およそどのくらいの時間で、その一定速度に近づくか、目安となる時間（具体的な秒数）を求めよ。

問３． 最終的にこの気球はいくらの高度まで上昇するか考えて見よう。

空気の密度の高度ｘに対する依存性は、近似的には、$\rho(x)=\rho_0\cdot\exp(-x/h_0)$ という式で表すことが出来るとしよう。ρ_0は地上での空気の密度、h_0は８ｋｍ（scale height と呼ばれる量）である。ここでは簡単のため、気温の変化などに関係なく上式が成り立つとしてよい。

気球は完全な球体の形状に比べて約８０％の体積を超えるようになると、気球の内圧が急激に上昇し始めるため、ガス放出弁からヘリウムガスを速やかに放出できるようになってい

る。弁が開いたあとは上昇運動がすぐに減少して「正味の浮力」がゼロになるので、ガス放出弁が再び閉じられてその時の高度を保つ。これら動作の間の高度変化は十分小さく無視できるものとすると、この気球の到達した高度はいくらか。

数値計算では、以下の自然対数の表を参考にせよ。

(参考用の対数表)

x	2	3	5	7
$\log_e x$	0.693	1.099	1.609	1.946

Ⅳ

等温理想気体の媒質が重力と圧力勾配の釣り合いで定まる平衡状態にあるとする。重力の方向を z 方向と定め、鉛直上向きを z 軸の正方向とする。本設問では、この平衡状態への微小摂動が鉛直方向 z へ音波として伝搬する様子を調べよう。z 軸に垂直な面内では、どの z においても一様等方かつ無限とする。なお、平衡状態の物理量には添字 0 を、微小摂動量には添字 1 を割り振る。

重力加速度 g が一定である場合、平衡状態における媒質の質量密度 $\rho_0(z)$ は

$$\rho_0(z) = \rho_0(0)\mathrm{e}^{-z/H} \tag{1}$$

と z 依存性を持つ。ここで、H は c_s^2/g、c_s は音速である。微小摂動量に対する流体力学の基礎方程式はそれぞれ

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 u_1)}{\partial z} = 0 \qquad \text{(質量保存の式)} \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho_0 u_1)}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} - \rho_1 g \qquad \text{(運動方程式)} \tag{3}$$

$$p_1 = c_s^2 \rho_1 \qquad \text{(気体の状態方程式)} \tag{4}$$

である。ここで、t は時間、u は速度、p は圧力である。

問 1．$\rho_1/\sqrt{\rho_0}$ の z 方向への 2 階微分を計算し次の係数 A と B を求めよ。

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_0}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\rho_1 + A\frac{1}{H}\frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\frac{\partial}{\partial z}\rho_1 + B\frac{1}{H^2}\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_0}} \tag{5}$$

問 2．式 (2)、式 (3)、式 (4) より $\rho_1/\sqrt{\rho_0}$ を変数とした次式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + C^2\right]\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_0}} = 0 \tag{6}$$

が導かれる。C(正の値とする) を c_s と H を用いてあらわせ。必要ならば問 1 の結果を用いてよい。

問 3．$\rho_1/\sqrt{\rho_0}$ が $\exp[i(\omega t - k_z z)]$ に比例するとして、式 (6) から ω と k_z との関係式を導け。ここで、ω は振動数、k_z は z 方向への波数である。さらに、導かれた関係式の波数依存性をグラフで示せ。

問 4．前問において許される振動数の絶対値に下限があることが分かる。その物理的理由を述べよ。