２００３年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学　物理学 I

（ 200 点 ）

［　時間　　2　時間　］

注意　１．　問題は４頁、４問題である。
　　　２．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　３．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　４．　問題用紙は持ち帰ること。

I

微分方程式

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad ①$$

について、次の問に答えよ。

問１．方程式①が、完全微分方程式、つまり、左辺がある関数の全微分となっているための必要十分条件は、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad ②$$

であることを示せ。

問２．微分方程式

$$(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0 \qquad ③$$

を解け。

II

問 1 理想気体が断熱膨張するとき，圧力 P と密度 ρ の間には

$$P = K\rho^{\gamma} \tag{1}$$

の関係があることを示せ。ただし，$\gamma = C_p/C_v$ で、C_p, C_v はそれぞれ，1モル当たりの定圧比熱、定積比熱である。また、K は比例定数である。

一定の重力加速度 g の下にある理想気体から成る大気を考える。大気底面からの高さ z での圧力，密度，温度を，それぞれ，$P(z)$, $\rho(z)$, $T(z)$ としよう。

問 2 圧力と重力がつりあっているとき，つりあいの式を書け，

問 3 平均分子量 μ および温度 T が一定の大気の場合，密度を高さの関数として求めよ。また，密度が 1/e 倍 になる高度差 (scale height) はいくらか。

つぎに，対流で熱が運ばれる場合を考える。対流要素は，その圧力が，まわりの大気の圧力と等しくなるように調整しながら，断熱的に上昇・下降するとしよう。この結果、大気はいたるところ，このような対流要素から成り，結局，式 (1) の K は、層全体で一定とみなすことができる。対流要素の速度は小さいので、**問 2** の圧力と重力のつりあいも成り立つ。

問 4 対流層での密度と温度を高さの関数として求めよ。

Ⅲ

球対称ポテンシャル中での質量 m_0 の粒子の状態を調べる際には、以下の様な極座標系での Schrödinger 方程式が用いられる。

$$\left[\frac{p_r^2}{2m_0}+\frac{\boldsymbol{\ell}^2}{2m_0r^2}+V(r)\right]\psi=E\psi \tag{1}$$

但し、p_r は動径運動量演算子

$$p_r=\frac{\hbar}{ir}\frac{\partial}{\partial r}r \tag{2}$$

であり、$\boldsymbol{\ell}$ は r を含まない演算子で軌道角運動量演算子と呼ばれる。

問1．$\boldsymbol{\ell}^2$ の固有値 $\ell(\ell+1)\hbar^2$ に対応する固有関数 ${Y_m}^{\ell}(\theta,\phi)$ を用いて波動関数を $\psi=r^{-1}u(r){Y_m}^{\ell}(\theta,\phi)$ としたとき、u の満すべき方程式を書け。

問2．量子数 m の名称と物理的意味を書け。

以下、簡単のため $\ell=0$ (${Y_0}^0(\theta,\phi)=$ 定数) の場合のみを考え、$V(r)$ を球対称井戸型ポテンシャル

$$V(r)=\begin{cases}-V_0\,, & (r<a)\\ 0\,, & (r>a)\end{cases} \tag{3}$$

(但し $V_0>0$) とする。以下の問いに答えよ。

問3．束縛状態は離散的固有値を持つことを示し (グラフによる図示でも可)、少なくとも1つの束縛状態が存在するための a, V_0 に関する条件を求めよ。

問4．束縛状態が存在する場合の最低エネルギー状態の波動関数 $\psi(r)$ を r の関数として図示し (規格化の必要はない)、古典論との違いについて述べよ。

IV

単振動している荷電粒子に一様磁場をかけたとき、粒子の運動はどうなるか考える。これはゼーマン効果の古典モデルである。以下の問いに答えよ。

問1　電磁場、重力場のない空間で、距離に比例する力を受けて単振動している荷電粒子の運動方程式を書け。ただし、荷電粒子の質量を m、電荷を e、粒子に働く力を $-a\mathbf{r}$ とし、$a > 0$ とする。$\mathbf{r} = (x, y, z)$ は原点からの位置ベクトルである。単振動の角振動数 ω_0 と、a、m の関係はどうなるか示せ。

問2 問1のシステムに一様磁場 $(0, B, 0)$ をかけたときの、荷電粒子の運動方程式を書け。

問3　問2の方程式の一般解を求めよ。(ヒント：解が $e^{i\omega t}$ に比例するとせよ。)

問4　ラーモア（ジャイロ）振動数 $\omega_L = eB/m$ が単振動の角振動数 ω_0 よりずっと小さい場合、粒子の固有振動数 ω は、$\omega \simeq \omega_0 \pm \frac{1}{2}\omega_L$ となることを示せ。（この振動数変化が、ゼーマン効果における光子の振動数変化の物理的理由である。）

問5　問4の場合、粒子の xz 平面に投影した軌道はどうなるか、概略を図示せよ。