２００２年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学　物理学 II

（ 200 点 ）

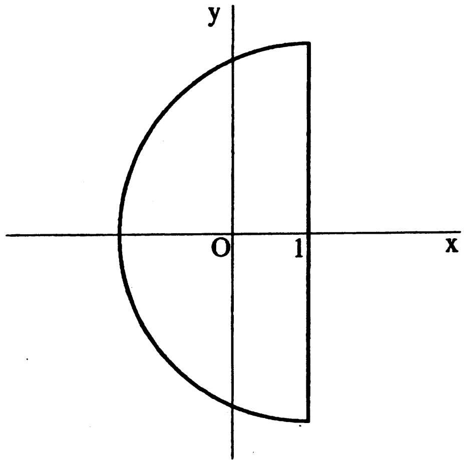
［　時間　　２　時間　］

注意　１．　問題は４頁、４問題である。
　　　２．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　３．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　４．　問題用紙は持ち帰ること。

I

複素数を $z=x+iy$ として、図に示す積分路に沿う積分から $I(a)$ を求めよ。ただし $a>1$ とする。

$$I(a)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{y\to+\infty}\int_{1-iy}^{1+iy}\frac{a^z}{z^2}dz$$



II

理想気体中の等温衝撃波を考える。衝撃波が静止して見える系では、流れは衝撃波の上流で超音速であり、下流では亜音速になる。このような系において、衝撃波の上流の密度、速度、圧力を各々ρ_1, v_1, p_1、下流の密度、速度、圧力を各々ρ_2, v_2, p_2とする。ただし上流、下流のそれぞれの領域で物理量は一様とする。このとき衝撃波の上流と下流の間には運動量保存則、

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2 \tag{1}$$

が成り立っている。また、衝撃波の上流と下流の気体の温度は等しいとする。

以下の問いに答えよ。

問１ 衝撃波の上流と下流の間で成り立つ質量保存則を記せ。

問２ 質量保存則と運動量保存則を用いて $v_1 > c$ ならば、$v_2 < c$ となることを示せ。ただし、$c = (p_1/\rho_1)^{1/2} = (p_2/\rho_2)^{1/2}$ は等温の場合の音速であり、上流と下流で等しい。

問３ 衝撃波マッハ数 $(M_1 = v_1/c)$ が 10 のとき、気体の圧縮率 (ρ_2/ρ_1) はいくらになるか？

問４ 等温衝撃波の上流と下流におけるエネルギー流束（エンタルピー流束と運動エネルギー流束の和）をそれぞれ求めよ。また、衝撃波通過後、エネルギー流束は増加するか、減少するか、あるいは変わらないか、その物理的理由とともに述べよ。ただし、理想気体は単原子からなるとする。

III

図1の様なプラズマ中に置かれた厚み a の薄く無限に広がったシート状の領域を考える。今、この領域中から正電荷が除外され、一様な数密度 n 、電荷 -e の電子のみで満たされたとする。また、その外の領域は正負の電荷密度は等しく、電気的に中性な状態であるとする。

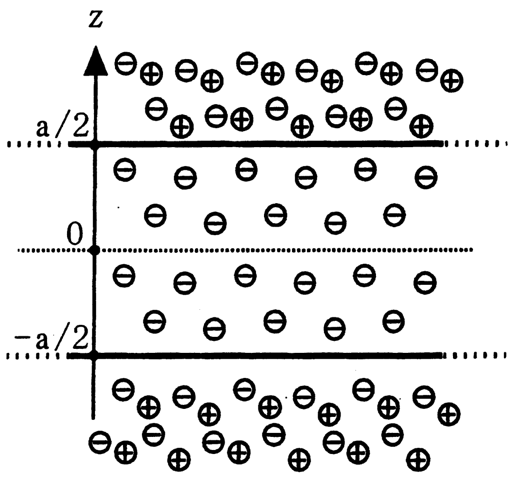


図1

問1　この時、ガウスの法則を利用して、このシート状領域内外での z 軸方向に沿った電場 E(z) が以下の様になることを示せ。

$$
\begin{cases}
E(z) = -\dfrac{ne}{\varepsilon_0} z & (|z| \le a/2) \\
E(z) = -\dfrac{ne}{2\varepsilon_0} a & (z > a/2) \\
E(z) = +\dfrac{ne}{2\varepsilon_0} a & (z < -a/2)
\end{cases}
$$

ヒント：
・ガウスの法則は一般に

$$\int_S \{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{n}(\mathbf{r})\} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

・z=0 に対する対称性より、E(-z) = -E(z) と考えて良い。

次に、電気的に中性なプラズマ中に置かれた、厚さ d の薄く無限に広がったシート状領域を考える。正負の電荷 (-e, +e) の数密度は共に n であるとする。
今、このシート中の全負電荷を微小距離 ξ だけ +z 方向に移動させる。するとシートの +z 側の面に厚さ ξ の負電荷優勢の領域が、-z 側の面に厚さ ξ の正電荷のみの領域ができる (図2) ため、このシートの間には z 軸方向に沿った電場が発生し、それによる復元力のために負電荷は z 軸に沿って振動し始める。

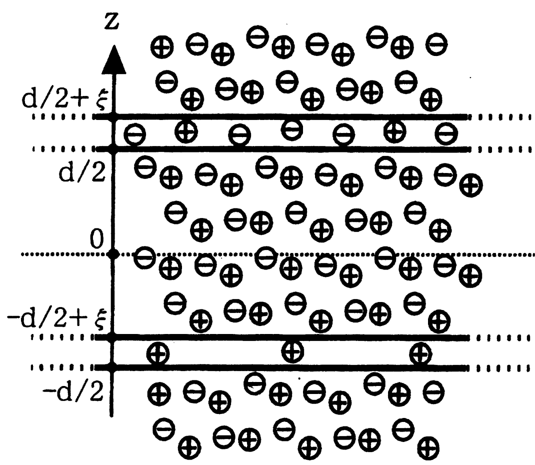


図2

問2　図2のような状態において、問1の結果を参考に、シート間の電場 E(z)を求め、シート中の単位体積当たりの負電荷が受ける復元力は、$-(n^2e^2/\varepsilon_0)\,\xi$ となることを示せ。ただし、幅 ξ の2つの領域以外では、正負の電荷密度は等しい状態を保っているとする。

問3　単位体積当たりの負電荷に対する運動方程式を解くことにより、この振動の振動数 ω を求めよ。負電荷1個の質量は m とする。ただし、ここでは電気的な力以外の効果は無視してよい。なお、この ω は、プラズマ振動数と呼ばれるものである。

IV

質量 m の 1 個の粒子に対する波動関数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ に対して、あるベクトル量 $\boldsymbol{J}$ を

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{Re}[\psi^* \frac{\hbar}{im} \nabla \psi] \tag{1}$$

と定義する。ここで Re[ ] は複素数の実数部分を表し、h をプランク定数として $\hbar = h/2\pi$ である。

問 1　式 (1) で定義された $\boldsymbol{J}$ に対して、ψ を実数部 ψ_{R} と虚数部 ψ_{I} に分けて $\psi = \psi_{\mathrm{R}} + i\psi_{\mathrm{I}}$ として計算し、

$$\boldsymbol{J} = \frac{\hbar}{2im}\{\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*)\psi\} \tag{2}$$

となることを示せ。

問 2　V をあるポテンシャルとして、ψ はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi + V\psi \tag{3}$$

を満たす。このことを用いて確率密度 $P(\boldsymbol{r},t) = |\psi(\boldsymbol{r},t)|^2$ に関する式

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{J} = 0 \tag{4}$$

か成り立つことを示せ。

問 3　ψ が平面波 $A\exp\{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)\}$ の時、$\boldsymbol{J}$ を定義に従って計算せよ。またこの結果を参考にして、式 (4) と流体力学の連続の式との類似性をもとに、$\boldsymbol{J}$ の物理的意味を述べよ。