２００２年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学・物理学　I

(200 点)

[　時間　　2　時間　]

注意　１．　問題は６頁、４問題である。
　　　２．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　３．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　４．　問題用紙は持ち帰ること。

I

以下の２変数関数 $f(x,y)$、及び $z=f(x,y)$ で定義される曲面について設問に答えよ。

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\ \text{の場合}\\ 0 & (x,y)=(0,0)\ \text{の場合}\end{cases}$$

問１．点 $(x,y)=(0,0)$ を起点として x-y 面内で定義されるすべての方向に関して、点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の方向微分を微分の定義式に基づいて求めよ。

[ヒント] 例えば、$(0,0)$ と $(\cos\theta,\sin\theta)$ を結ぶ方向への微少変化を考えればよい。

問２．一般に、２変数関数 $g(x,y)$ について、

$$\left.\begin{array}{l} g(x,y)-g(a,b)=A(x-a)+B(y-b)+\varepsilon\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},\\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}\varepsilon=0 \end{array}\right\}\ \text{条件 [1]}$$

が成り立つとき、$g(x,y)$ は点 (a,b) で全微分可能であるという。ただし、A、B は定数である。このとき $A=\frac{\partial g}{\partial x}|_{a,b}$, $B=\frac{\partial g}{\partial y}|_{a,b}$ となる。条件 [1] が成り立つことは、xyz 座標で定義される曲面 $z=g(x,y)$ が点 $(x,y,z)=(a,b,g(a,b))$ において接平面を持つことに対応している。この条件式に含まれている、接平面の意味を簡潔に述べよ。

問３．条件 [1] を用いて、$f(x,y)$ が点 $(0,0)$ において全微分可能かどうかを判定せよ。

問４．$g(x,y)$、$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$、及び $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ が連続関数ならば、$g(x,y)$ は全微分可能である。このことを用いて、$f(x,y)$ が点 (c,c)（ただし c は正の定数）において全微分可能であることを示せ。また、点 $(c,c,f(c,c))$ における $z=f(x,y)$ に対する接平面の方程式を求めよ。

II

n 次元実空間上の、M 個の観測値ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_M$ の集合の分布を最もよく表す直線 l を求める問題を考察する。簡単のため、直線 l は原点を通るものとし、$\sum_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ とする。この直線の方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とする。

問 1 直線 l と観測点 $\boldsymbol{x}_i$ の間の最短距離 d_i を、$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}_i$ を用いて表せ。内積 $(\cdot)$ やノルム $(\|\ \|)$ 等の記号を用いてよい。

この問題は、最小二乗法の考え方から、$\sum_i {d_i}^2$ を最小にする $\boldsymbol{p}$ を求める問題に帰着する。$\|\boldsymbol{p}\| = 1$ を用いて変形すると、この問題は、さらに、$S = \sum_i (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}_i)^2$ を最大にすることに帰着する。

以下、$\boldsymbol{x}_i$ は縦ベクトルとし、$n \times n$ 行列 $\mathbf{V}$ を、

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \tag{1}$$

と記述する。ただし ^{T} は転置記号である。

問 2 $\boldsymbol{p}$ を n 次元縦ベクトルとした時、

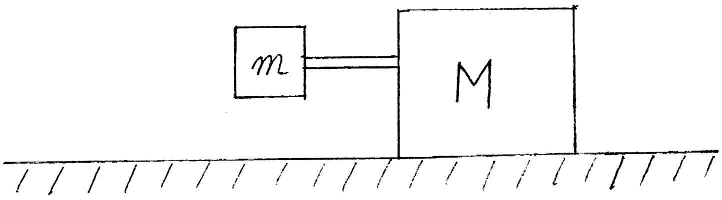
$$S = \boldsymbol{p}^T \mathbf{V} \boldsymbol{p} \tag{2}$$

となることを示せ。

問 3 行列 $\mathbf{V}$ は対称行列であることに注意して、S を最大にする $\boldsymbol{p}$ は、$\mathbf{V}$ の最大固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルで表されることを示せ。

III

次の文章を読み、問１一問３に答えよ。
下図のように質量Mと質量m $(M > m)$の剛体を、質量の無視できる棒でつないで床におく。質量Mの物体は床に接するが、質量mの物体は常に宙に浮いていて、これらの系全体として傾くことはないとする。また、棒は常に二つの剛体をつないでいる。床との間で働く摩擦の、動摩擦係数はμ、最大静止摩擦係数はμ_0とする。



問 1　最初この系は静止していたが、棒が急速にΔLだけのびて停止した。この時、質量Mの物体はどれだけ床にそって移動したか。ただし、床との間で働く摩擦力は、棒がそれぞれの剛体を押す力Fにくらべて十分小さく、無視できるとする。

問 2　次に、棒を縮めて、質量mの物体を一定の加速度αで質量Mの物体の側に戻していく。ただし、この時の加速度αは、棒が質量Mの物体に及ぼす力が最大静止摩擦力以下になるようなものとする。棒の長さが元の長さに戻ったところで、突然縮めるのを止めたところ、質量mの物体と質量Mの物体は同じ速度で動き出した。この時の速度を求めよ。

問 3　その後、質量Mの物体はどれだけ移動して静止するか。また、この移動量を最大にする加速度αを求めよ。

IV

下の文章の$\boxed{}$の中に適切な語句，式あるいは文章を入れよ。$\boxed{ニ}$と$\boxed{チ}$は導き方も答えよ。

単原子理想気体からなるガス球のエントロピーについて考えてみよう。まず

気体の温度	T	
気体の密度	ρ	
気体の圧力	P	
気体の分子量	μ	
アボガドロ数	N_A	
ボルツマン定数	k	
気体の単位質量あたりの内部エネルギー		E
気体の単位質量あたりのエントロピー		S
ガス球の質量	M	
ガス球の半径	R	
重力加速度	g	
重力定数	G	

とおく。

ガス球が無限小の可逆変化を受けたとき，内部エネルギーの変化は

$$dE = TdS - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{1}$$

で与えられる。第一項は系に加った$\boxed{イ}$であり，第2項は$\boxed{ロ}$が系になした仕事である。

式(1)を書き直して

$$TdS = dE + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{2}$$

となる。

一方，内部エネルギーと圧力は

$$E = \frac{3}{2}\frac{N_A \boxed{\quad ハ \quad}}{\mu}, \tag{3}$$

$$P = \frac{\rho N_A \boxed{\quad ハ \quad}}{\mu} \tag{4}$$

と表わされる。

ガス球の半径が変わるときのエントロピーの変化は

$$\frac{dS}{dR} = \frac{N_A k}{\mu}\frac{d}{dR}\left(\boxed{\quad ニ \quad}\right) \tag{5}$$

となる。積分を実行して

$$S = \frac{N_A k}{\mu}\left(\boxed{\quad ニ \quad}\right) + \mathrm{const.} \tag{6}$$

を得る。この式から，気体が $\boxed{\quad ホ \quad}$ 的に変化するとき，エントロピーは一定であることが分る。

ガス球が静水圧平衡を保ったまま，ゆっくり重力収縮するものとする。次元解析から，ガス球の密度と重力加速度の概略値は

$$\rho \approx \frac{M}{R^3}, \tag{7}$$

$$g \approx \frac{G \boxed{\quad ヘ \quad}}{R^2} \tag{8}$$

となる。さらに，静水圧平衡の式を用いて圧力の概略値を求めると

$$P \approx \frac{GM^2}{\boxed{\quad ト \quad}} \tag{9}$$

となる。これらを用いて式(6)からガス球全体のエントロピーは

$$S_{T} = M \frac{3}{2} \frac{N_A k}{\mu} \boxed{\quad チ \quad} . \tag{10}$$

ここで積分定数は0(ゼロ)にとった。したがって静水圧平衡を保ちながら重力収縮するとき、このガス球の全エントロピーは $\boxed{\ リ\ }$ する。その物理的な理由は

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad ヌ \qquad\qquad\qquad}$$

である。