２００２年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

天文学

（ 200 点 ）

［ 時間　２ 時間　３０ 分 ］

注意
１．問題冊子は７頁である。
２．問題Ｉ、Ⅱ、Ⅲのうちから、２問題を選択して解答せよ。
３．解答は問題毎に別紙に作成すること。
４．答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
５．問題用紙は持ち帰ること。

I

球対称である恒星の構造を決める基本的方程式は、連続の式

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{1}$$

と静水圧平衡の式

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho \tag{2}$$

である。ここで、$M(r)$ は半径 r 内に含まれる質量、ρ は密度、P は圧力、G は万有引力定数である。圧力 P と密度 ρ の間に

$$P = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+1/n} \tag{3}$$

が常に成り立つとすると、(1) 式から (3) 式だけで、恒星の構造を決めることができる。(3) 式が成り立つようなガスをポリトロープといい、n をポリトロピック・インデックスとよぶ。

以下では、ポリトロープからなる恒星について考察しよう。ポリトロープからなる恒星は、考察が簡単であるだけでなく、多くの恒星の構造のよい近似になっている。

問1 (2) 式とポアッソンの方程式より、

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{4}$$

が成り立つことを示せ。

問2 (3) 式を用いて、(4) 式は無次元変数 θ、ξ を用いると

$$\rho = \lambda\theta^n \tag{5}$$

$$r = \alpha\xi \tag{6}$$

と置くことにより、無次元化された方程式

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n \tag{7}$$

が得られることを示せ。(7) 式は Emden 方程式と呼ばれる。

問3 (7) 式は非線形2階の常微分方程式であるため、通常は数値計算で解かなくてはならない。ところが、(7) 式は $\xi = 0$ が特異点であるため、$\xi = 0$ から数値的に解くことができない。　そこで、$\xi = 0$ の近傍は、解析的に求めた級数解を用い、有限の ξ から、数値的に解を求める。初期条件

$$\theta(0) = 1, \qquad \left.\frac{d\theta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0 \tag{8}$$

を満たす、$\xi = 0$ 近傍の級数解の ξ^2 の係数を求めよ。

問4 Emden 方程式は特別な n の場合には、解析解を持つ。(8) 式を満たす、$n=1$ の場合の解析解を$\theta = f/\xi$と置くことにより求めよ。

問5 星の半径は、密度が零になるところで決まる。$n=1$ の場合の星の半径 R（無次元化されたものでなく、次元のある量）を求めよ。$K = 4 \times 10^9\ \mathrm{Nm^4/kg^2}$ である時の星の半径を有効数字 1 桁まで求めよ。ただし万有引力定数は $G = 7 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ である。

問6 問5 で求めた星の半径は、物理定数 G、 K のみに依り、λ (中心密度) には依存しない。このことの物理的意味を考察せよ。

II

次の問題を読んで、問に答えよ。

皆既日食の際に肉眼で見られる、コロナの連続光の主要部分はKコロナと呼ばれ、自由電子が太陽表面からの光を散乱したものである。図1は、観測者の視線方向を含む面で切った太陽本体とその外側のコロナを表している。以後この設問では、簡単のために球対称のコロナを考えることにする。観測されるKコロナの放射強度 I_k は、視線方向 (x 軸) に沿って分布している自由電子による散乱光の和であるので、次のように表される。

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma N(r) I(r) dx \tag{1}$$

ここで、σ は散乱断面積、$N(r)$ は、太陽中心からの距離 r におけるコロナ電子密度である。 また、$I(r)$ はその点のコロナが太陽表面から受ける平均放射強度である。 しかし図1のように、太陽の縁のすぐ外側で観測されるKコロナの放射強度に対しては、次のような簡単な近似式を用いることができる。

$$I_k = \sigma_0 R N_0 I_0 \tag{2}$$

ここで、I_0 は太陽表面の平均放射強度、N_0 はコロナ底部の平均電子密度を表している。R は太陽半径で、 $R = 7.0 \times 10^8$ m である。また、σ_0 は、この場合における σ の近似値で、$\sigma_0 = 3.3 \times 10^{-29}\mathrm{m}^2$ である。

問1　観測によると、太陽縁のすぐ外側のKコロナの放射強度は太陽表面の平均放射強度の約 10^5 分の1である。このことから、コロナ底部における平均電子密度を求めよ。

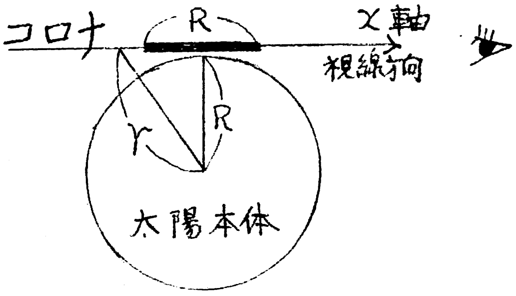
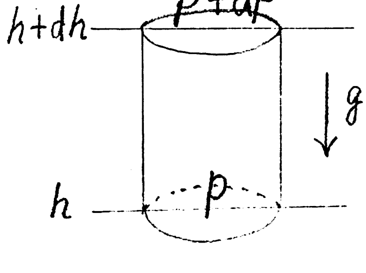


図 1

次に、コロナガス中の力学平衡状態について考える。図2には、太陽表面からの高さhにおけるコロナガスの円柱が示されている。円柱の高さは dh、上底下底のガス圧を $p+dp$ および p、ガスの密度を ρ とする。

問2　コロナ中に静水圧平衡が成り立っているとした場合、円柱に働く力の釣り合いの式を書け。ただし、重力の加速度 g は高さによらず一定であるとせよ。



問 3　コロナの温度が、一様な値 T であるとした時、スケールハイト H（密度が $1/e$ すなわち、約 $1/2.7$ に落ちるまでの距離）が $H = kT/(\mu mg)$ で表されることを示せ。ここで μ は平均分子量、m は陽子の質量であり、k はボルツマン定数である。

これまでになされたKコロナの多くの観測から，コロナ中の電子密度 $N(r)$ $\mathrm{m^{-3}}$ の高さ変化は次のような近似式で表されるという結果が得られている。

$$N(r) = 4.2 \times 10^{4.2} \times 10^{4.4/r} \tag{3}$$

ただし、この式で、r は太陽中心からの距離で、太陽半径 R を単位として測ったものである。コロナ中では、電子密度と陽子密度は近似的に等しいと考えて良いので、上の(3)式はそのまま陽子密度の高さ変化として用いることが出来る。

問 4　コロナ中で電子密度と陽子密度が近似的に等しい、と考えられる理由を述べよ。

問 5　上の (3) 式により、$r = 1.1$ のコロナ底部におけるコロナガス密度のスケールハイトを計算せよ。 ただし、$\log e = 0.43$ である。

問 6　最初の問 1 において用いた (2) 式のような簡単な近似式でも、コロナ底部の平均電子密度について、ほぼ正しい値を求めることができる。この近似が妥当である理由を考察して述べよ。

問 7　以上の結果を用いて、コロナ底部における温度を計算せよ。ただし、$\mu = 1/2$、$m = 1.7 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$、 $g = 2.7 \times 10^2 \mathrm{m/s^2}$, $k = 1.4 \times 10^{-23}\mathrm{J/K}$　とせよ。

Ⅲ

ある種の銀河は星とガスからなる円盤状になっており、図１のように銀河中心の周りに星とガスが、近似的にはまったく同じように回転していると考えられている。回転運動の状態を詳しく知るには、原子や分子に特有の輝線スペクトルや吸収スペクトルを測定する方法が用いられる。

円盤を真横に近い方向から見ているある遠方の銀河について、水素のＨα線の分光観測を行なった。正確には真横でないが、以下の計算では傾き角は無視して良いものとする。この銀河の円盤の見かけの長軸は東西方向に延び、長軸直径を見込む角は１２０秒であった。

この銀河の中心方向をＨα線で測定したところ、図２に示すような輝線スペクトルが得られた。この輝線がもつ波長方向の広がりは、銀河中心部のガス運動を反映していると考えられる。その中心波長は、本来のＨα輝線の波長 656.3 nm と比べて長波長側にずれていることに注意しよう。

次に東西に延びた長軸の各点でＨα輝線のスペクトルを測定すると、各位置において図２と似たスペクトルが得られる。それらのスペクトルの中心波長λ_Cを、銀河の中心からの角度（角距離）を横軸にとって表示したものが図３である。これらの観測結果と関連した以下の問１～問４の問題の答えを解答用紙に記入せよ。

なお、本問題で使う物理定数や単位変換は以下の数値を用いよ。

重力定数 $G = 7 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} 、　光速 $c = 3 \times 10^8$ m/s、
角度１秒 = 5×10^{-6} radian、　1 pc（パーセク）= 3×10^{16} m、
1 Mpc（メガパーセク）= 10^6 pc、　太陽質量 $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg

問１　この銀河までの距離はいくらと推定されるか。また、この銀河の長軸の実際の長さをpc 単位で求めよ。なお、ハッブル定数 H_0 は 60 km/s/Mpc を使うこと。
注：ハッブル定数は、「宇宙膨張にともなう遠方銀河の後退速度は距離に比例する」というハッブルの法則における比例定数である。

問２　図３は、この銀河の円盤を構成している星とガスが回転運動（円盤内における回転円運動）をしている状況を示していると考えられる。銀河中心からの距離が約 10″ から 45″ 程度までの範囲における回転運動の速度はいくらか。

問３　一般に、銀河の質量分布は星やガスの分布には必ずしも従わないで、むしろ球対称の分布をしている見えない物質（ダークマターと呼ばれる）が主たる質量を担っていると考えられている。そのような状況において、重力と遠心力がつりあって

円運動をしていると考えて、約 10″ から 45″ 程度までの範囲における質量分布を中心からの距離 r の関数として求めよ。

問4 図３で、銀河中心からの距離 r のさらに大きな領域においては、観測されたスペクトルの中心波長 λ_C は、銀河の中心部における値 λ_O に近づく傾向が観測されている。この部分（一点鎖線で表示）における観測結果は、$|\lambda_C - \lambda_O| \propto r^{-1/2}$ の曲線によりほぼ近似できることがわかっている。このことから、この銀河の質量分布がどのような状況になっていると考えられるかを説明せよ。また、この銀河の総質量は、大まかには太陽質量の何倍か、を計算の方法とともに示せ。

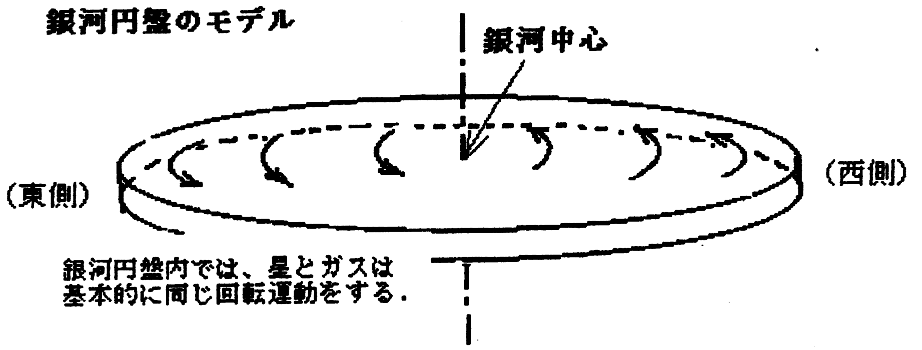


図１． 単純化した銀河円盤のモデル。ただし、円盤は剛体ではなく、回転速度は中心からの半径に依存して変わることに注意のこと。

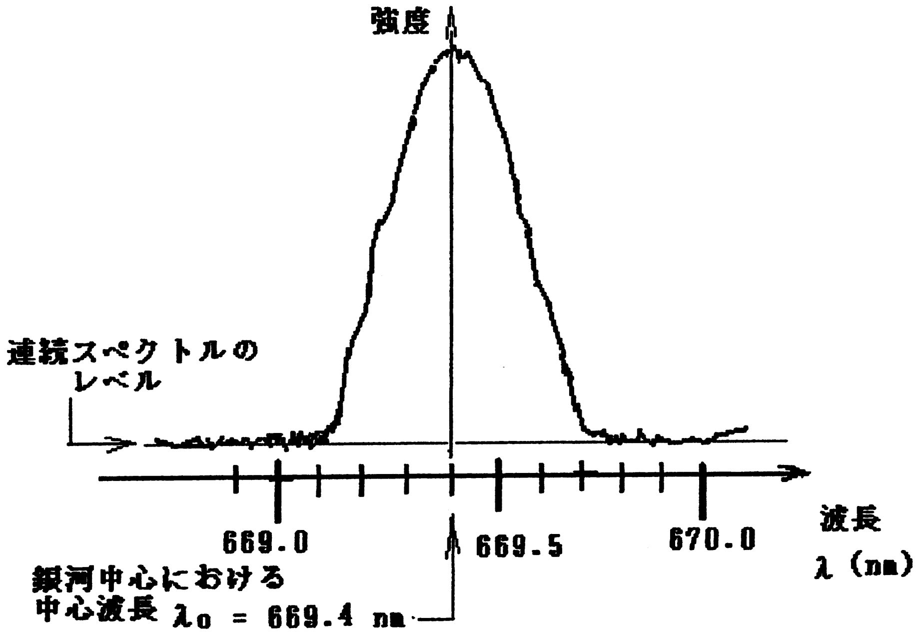


図２．銀河の中心部のＨα輝線スペクトル。

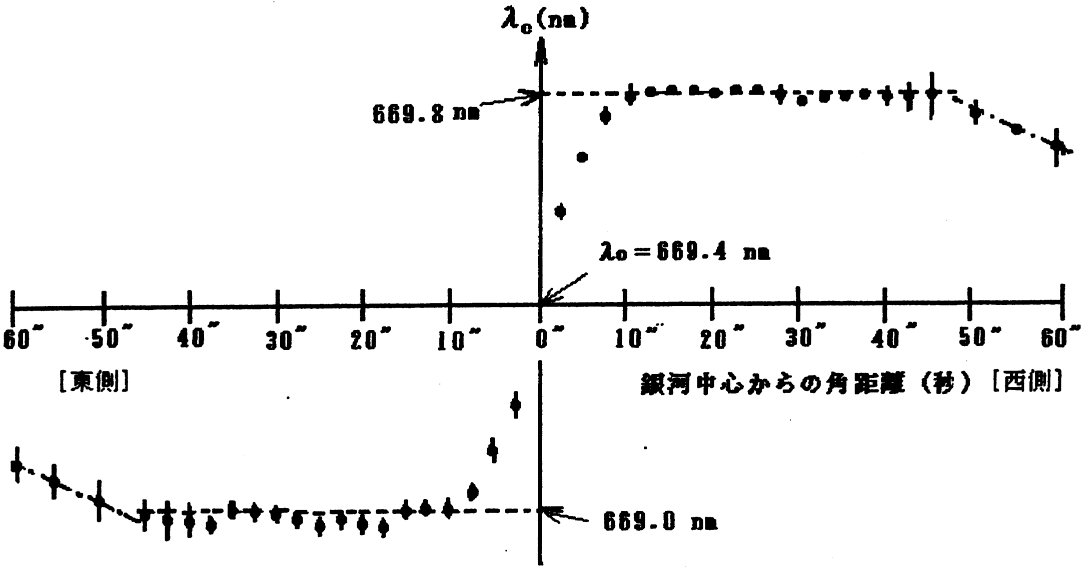


図３．Ｈα輝線スペクトルの中心波長の変化。横軸は銀河中心からの距離、縦軸は中心波長であり、それぞれの距離での輝線スペクトルの中心の波長が、測定誤差とともに示されている。