２００１年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学・物理学 II

（ 200 点 ）

［ 時間　　２　時間 ］

注意　１．　問題は５頁、４問題である。
　　　２．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　３．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　４．　問題用紙は持ち帰ること。

6

I

x, y, t を実変数として、次の連立微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + cx^3 \quad (c\text{ は正定数}) \end{cases} \qquad (1)$$

連立微分方程式の解 $(x(t), y(t))$ を xy 平面上に描いたものを解曲線とよぶ。上記の方程式の解曲線を求めて、解の性質を調べよう。

問 1.　$\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ となる解は、微分方程式の定常解とよばれる。上記方程式 (1) の定常解を求めよ。

問 2.　定常解の近傍の解曲線の様子は、もとの方程式を定常解近傍で線形化した方程式から求めることができる。方程式 (1) の定常解それぞれについて、その近傍の解曲線の振る舞いを図示せよ。

問 3.　方程式 (1) の解曲線群の概形を図示せよ。

5

II

ある系には N 個の離散的な状態があり，状態 i をとる確率を p_i ($i = 1, 2, \cdots, N$) で表す．p_i は $\sum_i p_i = 1$ を満たし，以下の規則に従って変化するものとする．

p_i からなる列ベクトルを

$$\nu = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} \tag{1}$$

と定義する．時刻 $t = n$ における ν を ν_n と記す．ν_n は次の一次変換によって $t = n + 1$ における状態 ν_{n+1} に変化する．

$$\nu_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \nu_n \tag{2}$$

ただし，$\mathbf{A}$ は $N \times N$ 行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \tag{3}$$

である．なお $\mathbf{A}$ の全ての要素は負でない実定数とする．

問 1 $\sum_i p_i = 1$ が常に満たされることに注意して，行列要素 a_{ij} の間に満たされるべき条件を求めよ．

問 2 行列 $\mathbf{A}$ は固有値 1 を持つことを示せ．

固有値 1 に対する固有ベクトルのなかで成分の和が 1 であるものを ω とすると，これは変換 $\mathbf{A}$ に対して時間に依存しない定常分布を表している．もし，任意の初期状態 ν_0 に対して

$$\nu_\infty = \lim_{k \to \infty} \mathbf{A}^k \cdot \nu_0 \tag{4}$$

が収束するならば，ν_∞ を極限分布と呼ぶ．

任意の正整数 k に対して,

$$\omega = \mathbf{A}^k \cdot \omega \tag{5}$$

であるから，定常分布 ω は極限分布の候補である.

問 3 定常分布が存在しても，必ずしも極限分布が存在するとは限らないことを示せ. [例えば: $N = 2$ の場合の一例を挙げよ]

問 4 $\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ を利用して $\mathbf{A}^k \cdot \nu_0$ の収束条件を考察することにより，極限分布が存在するためには，$\lambda = 1$ 以外の $\mathbf{A}$ の固有値の絶対値がすべて 1 より小さい必要があることを示せ. ただし，簡単のため $\mathbf{A}$ の固有値が全て異なっている場合のみを考察せよ.

III

中心力

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \quad (k\text{は正定数}) \qquad (1)$$

の作用を受ける質量mの粒子の運動を考える。

問1. 角運動量が保存されることを示せ。

問2. 運動は1つの平面に限られることを示せ。

問3. この粒子の軌道は，力の中心を楕円の中心とするような楕円であることを示せ。

問4. 粒子に変位を加えると新しい軌道へ移行する。新しい軌道周期はもとの軌道周期と同じであることを示せ。

問5. ケプラー運動では，大きい楕円軌道ほど長周期である。万有引力の法則と力の法則(1)を対比させて，その理由を述べよ。

IV

次の文章を読み、問１一問４に答えよ。

(A) 時刻 t_0 におけるある量子系の状態ベクトルを $|\psi(t_0)\rangle$ とし、任意の時刻におけるそれを $|\psi(t)\rangle$ とする。この二つの状態を結ぶ演算子 $U(t,t_0)$ を導入し、

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle \tag{1}$$

と表わす。但し、$U(t,t_0)$ は、その複素共役演算子である $U^\dagger(t,t_0)$ に対して、$U^\dagger(t,t_0)U(t,t_0) = \mathbf{1}$ の関係をもつとする。(1) 式において、$t = t_0 + \delta t$ の場合を考える。このとき、

$$U(t_0+\delta t, t_0) = U(t_0,t_0) + \delta t \frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} \equiv \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}\delta t H(t_0) \tag{2}$$

として、演算子 H を導入する。H は系のハミルトニアンとよばれる。($\hbar$ はプランク定数を 2π でわったものである。) (1)、(2) 式より、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \tag{3}$$

となる。これを Schrödinger 方程式という。ある物理量に対応する線型演算子を P とすると、時刻 t におけるその物理量の測定値の期待値は、$\langle P\rangle \equiv \langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle$ で、与えられる。ここに、$\langle\psi(t)|$ は $|\psi(t)\rangle$ の複素共役ベクトルである。これによって、任意の時刻における系の物理量の測定期待値が得られることになる。

(B) 次に、

$$|\psi\rangle' \equiv U^\dagger(t,t_0)|\psi(t)\rangle, \qquad P'(t) \equiv U^\dagger(t,t_0)PU(t,t_0) \tag{4}$$

とおくと、$|\psi\rangle'$ は時間に依存しない。演算子 P に対応する物理量の測定期待値は、$\langle\psi|'P'(t)|\psi\rangle'$ で与えられ、

$$\langle\psi|'P'(t)|\psi\rangle' = \langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle \tag{5}$$

である。P' は時間に依存し、その変化を表わす式は、$H' = U^\dagger HU$ として、

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P' = P'H' - H'P' \tag{6}$$

と表わされ、これを Heisenberg 方程式という。

問 1　(3) 式を導出せよ。

問 2　(4) 式で定義される $|\psi\rangle'$ は、時間に依存しないことを示せ。

問 3　(5) 式が成立することを示せ。

問 4　以上の結果、同じ量子系の時間発展を記述するのに、文章 (A) のような記述のしかたと、文章 (B) のような記述のしかたの二通りがあり、時刻 t における物理量の測定期待値も同じであることがわかった。(A)、(B) それぞれの見方の相違を説明せよ。

11