２００１年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学・物理学　I

（200 点）

［　時間　　2　時間　］

注意
1．問題は４頁、４問題である。
2．解答は問題毎に別紙に作成すること。
3．答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
4．問題Ⅳは別紙解答用紙に解答し、それにも受験番号と氏名を記入し、提出すること
5．問題用紙は持ち帰ること。

I

以下の設問に答えよ

問1　次の式を証明せよ

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(x^2+y^2)} dxdy = \frac{\pi}{4a} \quad (a > 0)$$

（ヒント：極座標に変換する）

問2　次の定積分の値を求めよ

$$\int_0^\infty xe^{-x^2} \sin 2bx dx$$

（ヒント：$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx$ を b に関して微分してみる）

II

1次元の酔歩を考える。原点Oより出発し、コインを投げ、表が出ると一歩前進し、裏が出ると一歩後退するものとする。以下、n 回コインを投げた場合を考える。ただし、コインは裏表同確率で出るものとする。

問1. k 歩前進した位置にある確率 $P(n,k)$ を求めよ。またそれは、

$$\left(\frac{1}{x}+x\right)^n = 2^n \sum_{k=-n}^{n} P(n,k) x^k \tag{1}$$

の x^k の係数 $P(n,k)$ となることを示せ。ただし、(1) 式の右辺の和で、k は $-n$, $-n+2, -n+4, \cdots, n$ と1つおきに取るものとする。

問2. k の期待値を求めよ。

問3. k^2 の期待値を求めよ。
[Hint. (1) 式を用い、$x \to 1$ の極限を考えよ。]

問4. Stirling の公式

$$\ln N! = \left(N+\frac{1}{2}\right)\ln N - N + \frac{1}{2}\ln 2\pi + O(N^{-1}) \qquad (N \to \infty) \tag{2}$$

を用いて、$n \to \infty, k \ll n$ のとき

$$P(n,k) \to \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2} \exp(-k^2/2n) \tag{3}$$

示せ。

III

オイラーの式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g}, \tag{1}$$

($\mathbf{v}$は速度ベクトル，ρは密度，pは圧力，$\mathbf{g}$は重力加速度ベクトル) を考える．流れが定常でかつ

$$p = K\rho^{\gamma}, \quad \mathbf{g} \equiv -\nabla\Phi, \tag{2}$$

[K (>0) およびγ (>1) は定数，Φはポテンシャル] と書ける場合，流線に沿って保存量が存在することを示し (ベルヌーイの定理)，その保存量を求めよ．なお，必要があれば次のベクトル公式を用いよ，

$$\frac{1}{2}\nabla(v^2) = \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}. \tag{3}$$

またポテンシャル流 $(\nabla\times\mathbf{v}=0)$ の場合，ベルヌーイの定理はどのように拡張されるか.

IV

図1のように、原点 (0, 0, 0) を通る、yz 平面に無限に広がった導体平面が接地されており、点 (a, 0, 0) に電荷 $+q$ がある（ただし、$\mathrm{a} > 0$ かつ $q > 0$)。無限遠方では、ポテンシャル $V = 0$ となっている。このとき、以下の問に答えよ。ただし、電荷 $+q$ が単独で存在するときに、そこから距離 r にある点でのポテンシャルは $V = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$ で与えられる。ε_0 は真空の誘電率である。

問1．$x \geq 0$ でのポテンシャルは、点 (−a, 0, 0) に電荷 $-q$ を仮想的に置き、導体平面が存在しなかったとしたときのポテンシャルに等しいことを次の手順に従って示せ。

（1）実際のポテンシャルに対する $x = 0$ における境界条件を書け。

（2）上述の仮想電荷が（1）の境界条件を満たすことを示せ。

問2．問1を参考にして、実際にできる電場の概形を解答用紙の図1上に電気力線で示せ。

問3．原点 (0, 0, 0) の位置において、導体平面上に誘導される電荷密度を求めよ。

問4．電荷 $+q$ に対して、導体平面から働く力 $\vec{F}$ の大きさと向きを求めよ。

問5．この電荷 $+q$ が x 軸に沿って $x = \infty$ から $x = \mathrm{a}$ まで動いてきたものとすると、そのときに電荷がなした仕事 $W = \int_{\infty}^{\mathrm{a}} \vec{F} \cdot d\vec{x}$ を求めよ。

問6．一方、この電荷 $+q$ が、点 (−a, 0, 0) においた電荷 $-q$ が固定されたまま（導体平面無しで)、$x = \infty$ から $x = \mathrm{a}$ まで動いてくる場合を仮に考えると、そのときに電荷 $+q$ がなす仕事 W' を求めよ。この W' は、問5で求めた W と異なる。なぜこのような違いがでるか定性的に述べよ。

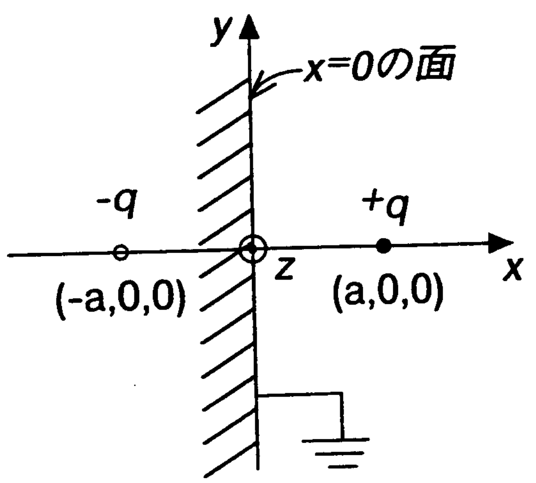

図1

5