２０００年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学　物理学　II

（ 200 点 ）

［　時間　　2　時間　］

注意　1．　問題は４頁、４問題である。
　　　2．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　3．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　4．　問題用紙は持ち帰ること。

I

問１．変数 x の関数 $y(x)$、及びその導関数 $y'(x)$ の汎関数 F の定積分

$$I = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

において、区間 $[a, b]$ と F の関数形が定まっているとき、I の値は関数 $y(x)$ によって決まる。この意味で、I を $I[y]$ で表す。このとき $I[y]$ が停留値をとる必要条件は

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

となることを示せ。ただし、変数と関数はすべて実数で、関数は必要な導関数まで微分可能で連続であるとする。

[ヒント] ε を充分小さい数、$\eta(x)$ を

$$\eta, \eta' \text{は } [a, b] \text{ で連続、} \eta(a) = \eta(b) = 0$$

を満たす任意の関数とし、$y(x)$ を $y(x) + \varepsilon\eta(x)$ に変えたときの $I[y]$ の変化を $\delta I[y] = 0$ とおくことにより考察を行え。

問２．図１のように、一様な重力（重力加速度 g）がはたらくところで、質点が鉛直面において、１つの点 $P_0(0, 0)$ からそれより低い位置の点 $P_1(2, \pi)$ まで、ある曲線 $y = y(x)$ にそって、初速０、摩擦力なしで落下して P_1 に達するとする。

（１）このときの所要時間を求め、これを問１の I に対応させた際に $F(x, y, y')$ に相当する関数形を求めよ。

[ヒント] 任意の x での、曲線に沿った質点の速さは $ds/dt = \sqrt{2gx}$ となる。

（２）問１にある必要条件を用いて、I が最小となるような曲線を求めよ。必要ならば、$x \propto (1 - \cos\theta)$ という形の変数変換を用いよ。

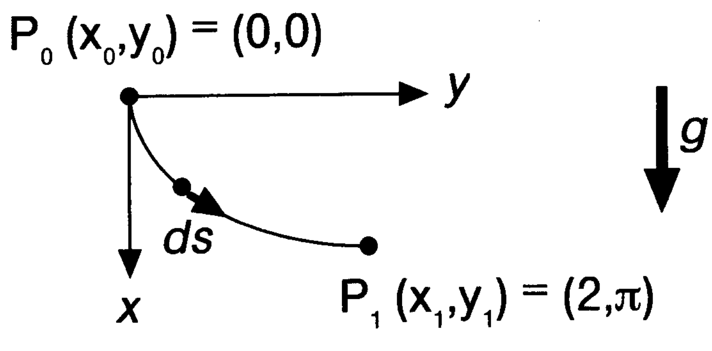


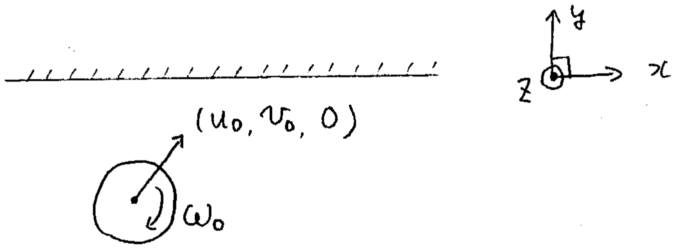
図１

II

x-y 平面に平行に運動する一様密度の剛体球（半径 R、質量 M）と、固定壁（x-z 平面、図参照）との衝突を考える。球は重心のまわりに角速度 ω_0 で回転しており、その回転軸は z 軸に平行である。球は、x 軸方向に u_0、y 軸方向に v_0 の速度（z 軸方向の速度はゼロ）で壁に衝突して跳ね返るとする。但し、壁は十分粗くて衝突時に摩擦を生じ、球はすべらない（壁との接線速度がゼロ）と仮定する。

問 1　回転軸に関する球の慣性モーメントは、$\frac{2}{5}MR^2$ となることを示せ。

問 2　衝突後の球の重心の速度と回転角速度を求めよ。但し、壁と球とのはねかえり係数は e とする。
[ヒント：衝突の際に、接触点で x 軸方向、y 軸方向にそれぞれ力積が働くとして考える。]



8

III

圧縮性流体の基本的性質（音波、衝撃波）を考察しよう。空間１次元、理想気体、非粘性、断熱の場合、基本方程式は、以下のように書ける。

$$\text{質量保存}\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \tag{1}$$

$$\text{運動量保存}\quad \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) = 0 \tag{2}$$

$$\text{エネルギー保存}\quad \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{p}{\gamma - 1}) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}\rho v^3 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}pv) = 0 \tag{3}$$

ただし、ρ, v, p は、（質量）密度、速度、圧力、$\gamma = c_p/c_v$ は比熱比、c_p, c_v は定圧比熱、定積比熱である。

問１　密度 (ρ_0) ＝一定、圧力 (p_0) ＝一定で、静止している流体に、微小摂動が加わった場合

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad p = p_0 + \delta p, \quad v = \delta v \tag{4}$$

(ただし、$|\delta\rho| \ll \rho_0, |\delta p| \ll p_0$) を考える。方程式（１）－（３）において、微小摂動の２次以上の項（例えば、$\delta\rho\delta v, \delta v^3, \delta p\delta v$ など）を無視し（線形近似）、$\delta p, \delta v$ を消去することにより、$\delta\rho$ だけに関する方程式を導出せよ。(これは、音波の伝播を記述する方程式（波動方程式）である。)

また、これより、音波の伝播速度（音速）がわかる。音速を ρ_0, p_0, γ の関数として示せ。

摂動が有限振幅になると音波は衝撃波へと進化する。衝撃波を通過すると、流体は急激に圧縮され加熱される。衝撃波の基本的な性質を調べるために、衝撃波面静止系で定常（時間に依存しない）状態を考えよう。このとき上の基本方程式（１）－（３）は時間微分の項がなくなるので、空間微分だけとなって簡単に積分でき、その結果、以下の３式を得る。

$$\rho_0 v_0 = \rho_1 v_1 \tag{5}$$

$$\rho_0 v_0^2 + p_0 = \rho_1 v_1^2 + p_1 \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}\rho_0 v_0^3 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}p_0 v_0 = \frac{1}{2}\rho_1 v_1^3 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}p_1 v_1 \tag{7}$$

ここで、添字０のついた量は衝撃波を通過する前の流体の物理量を示し、添字１のついた量は通過後の物理量を示す。これらの３式は、衝撃波前面の物理量がわかれば、後面の物理量がわかることを示している。

問２　強い衝撃波 $(p_1/p_0 \gg 1)$ の場合、衝撃波による圧縮率は、

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

となることを示せ。またそのとき、温度とエントロピーの変化を示せ。

問３　問２で見たように、衝撃波を通過すると、流体のエントロピーは増大する。これは流体の運動エネルギーが内部エネルギーに変換されたためである。このような変換を可能にするメカニズムを定性的に論ぜよ。

9

IV

２つの導体が接近して置かれている場合、その一組の導体はコンデンサーとしてお互いに向き合う面に符号の異なる電荷を蓄えることができる。導体間に備蓄できる単位電位差当りの電気量をそのコンデンサーの電気容量という。真空中に置かれたコンデンサーの電気容量に関して以下の問に答えよ（なお、ＳＩ単位系を用い、真空中での誘電率は ε_0 とする）。

問 1　２つの平面極板を用意し、それぞれを平行に配置する（図１）。両極板の面積は共にＳ、片方の帯電量はＱと表現する。ただし、極板間の電場は一様とみなす。

(1) 極板間の電場 (E_1) をＳを用いて書き表せ。

(2) ２つの極板間の間隔をｄとした場合、Ｑ及びＳを用いて両極間の電位差 (V_1) を書き表せ。

(3) このコンデンサーの電気容量 (C_1) をＳを用いて書き表せ。

問 2　次に同心の２つの球面を両極として電気容量を計算する（図２）。ここでは内側の極の半径をａ、外側の極の半径をｂとする。

(1) 内側の極の全電荷をＱとする。このとき、２つの極の間の、球面の中心から距離ｒでの電場 (E_2) を書き表せ。

(2) 両極間の電位差 (V_2) をａ，ｂを用いて書き表せ。

(3) このコンデンサーの電気容量 (C_2) をａ，ｂを用いて書き表せ。

問 3　球形コンデンサの電気容量 C_2 について論じてみる。

(1) まず、球形コンデンサーの電気容量を平行板コンデンサーの電気容量と同様な数式で表現できる条件を定性的に言葉で述べよ。このとき、「内側の球面の半径」と「２つの球面間の間隔」の比較を行え。

(2) 球形コンデンサーの電気容量 C_2 が問 3-(1) で述べた条件のもとで、実際に C_1 と同様な形式に表現できることを数式を用いて証明せよ。

図 2

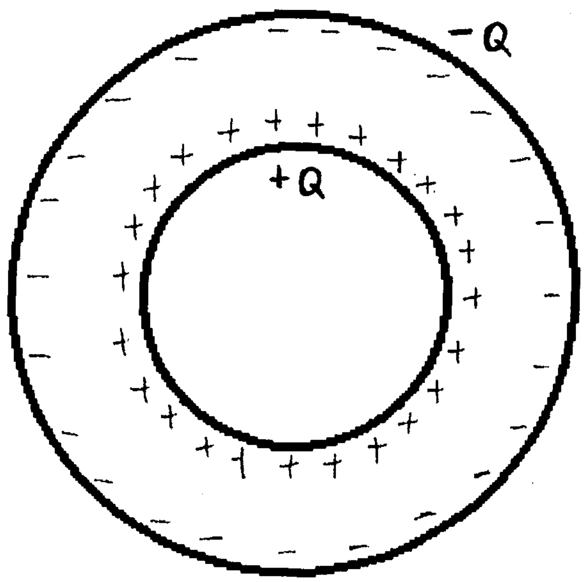


図 1