２０００年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学　物理学　I

（ 200 点 ）

［ 時間　　2 時間 ］

注意　１．　問題は４頁、４問題である。
　　　２．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　３．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　４．　問題用紙は持ち帰ること。

I

x-y 平面上の2次曲線

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad ①$$

がある。この曲線に張る互いに平行な弦の方向余弦が(λ, μ)であるとき、これらの弦の中点の軌跡は、直線

$$(ax + hy + g)\lambda + (hx + by + f)\mu = 0 \qquad ②$$

の上にある（参考図左）。

問１　２次曲線の対称軸を主軸という（参考図右）。直線②が２次曲線①の主軸となっているために必要な条件は、

$$\frac{a\lambda + h\mu}{\lambda} = \frac{h\lambda + b\mu}{\mu} \qquad ③$$

であることを示せ。ただし、$\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ の場合について考察せよ。

問２　式③の値を t と置けば、

$$\begin{vmatrix} a-t & h \\ h & b-t \end{vmatrix} = 0 \qquad ④$$

が成り立っていることを示せ。

問３　式④を満たす t の２つの解を t_1, t_2 とし、また、

$$D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \qquad ⑤$$

と書くと、２次曲線①は、$ab - h^2 \neq 0$ のとき、主軸変換によって、

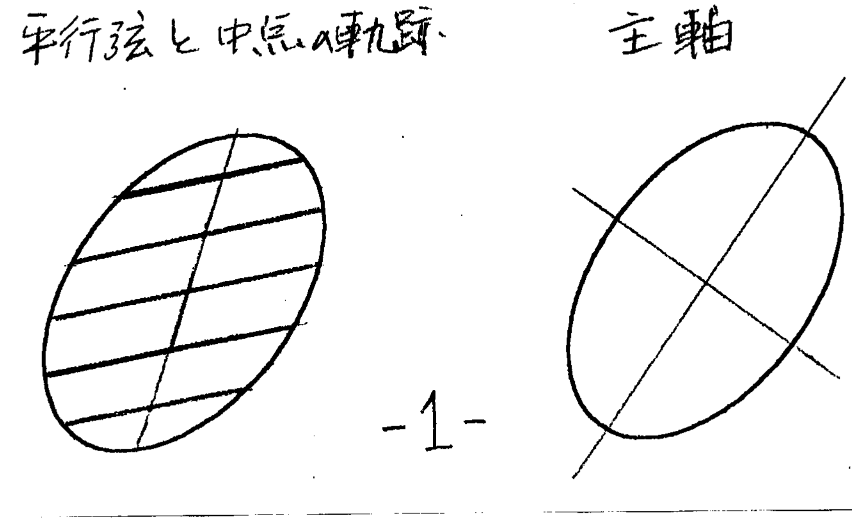
$$t_1X^2 + t_2Y^2 + D/(t_1t_2) = 0 \qquad ⑥$$

となる。これにしたがって、２次曲線

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 36x + 18y + 9 = 0 \qquad ⑦$$

を主軸変換せよ。

[参考図]　楕円の場合の例



II

k_1, k_2, aを正の実数として、微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a-x)^2 - k_2x^2 \tag{1}$$

を考える。ただし、$0 \leq x \leq a$とする。また、初期条件は $t = 0,\ x = 0$とする。

問1 式(1)を解け。

問2 $t \to \infty$のときの xの値を求めよ。

問3 xをtの関数としてその振る舞いを図で示せ。

III

問1　二つの系 A, Bが, 熱は通すが粒子は通さない壁を隔てて接触している. 壁の位置は自由に移動できるとし, また中に存在する粒子は一種類とする. 系 A, Bそれぞれの内部エネルギーを U_{A}, U_{B}, 圧力を p_{A}, p_{B}, 体積を V_{A}, V_{B}, 温度を T_{A}, T_{B}, 化学ポテンシャルをμ_{A}, μ_{B}, 粒子数を N_{A}, N_{B}とするとき, 系 $A+B$の平衡の条件を求めよ. ただし, 系 $A+B$は孤立系で, 全体の体積は一定に保たれているとする.

問2　二つの系 A, Bを隔てる壁が, さらに粒子を通す場合の系 $A+B$の平衡の条件を求めよ. ただし, 系 $A+B$は孤立系で, 全体の体積および粒子数は一定に保たれているとする.

IV

次の文章を読んで、問　1〜4　の答を、解答用紙に記入せよ。

粒子の運動を記述するシュレディンガー方程式は、波動関数 $\Psi(\vec{r},t)$ に対する式として、次のように書ける。

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t)+V(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t). \tag{1}$$

問1　波動関数 $\Psi(\vec{r},t)$ の物理的な意味について記述せよ。（ヒント：特に波動関数の絶対値の2乗や、規格化に関することを説明せよ。）

問2　粒子の運動が1次元（x 座標）に限られていて、ポテンシャルが、

$$V(\vec{r},t)=V(x)=\text{一定} \tag{2}$$

の場合について考える。

波動関数を、時間 t のみに関する関数部分と、座標 x のみに関する関数部分の積で表せるとして、変数分離したあとの、座標 x に関する波動関数 $\psi(x)$ に対するシュレディンガー方程式を書け。

（ヒント：変数分離の手続きにおいて現れる定数がエネルギーに対応することに注意せよ。）

その方程式において、$V(x)=0$ の場合、一般解を求めよ。さらに、無限の1次元空間の場合の規格化の条件を書け。

問3　次に、ポテンシャル $V(x)$ は、$-L\sim+L$ の範囲内だけでゼロで、それ以外の領域では無限大、となる場合について考察する。（ L は正の実数とする。）

ポテンシャルが無限大の領域では、波動関数の値はゼロであるので、

$$\psi(x=\pm L)=0 \tag{3}$$

である。この条件を使って、具体的な波動関数の関数形を書き、規格化の条件を具体的な表式で書け。

問4　上記の波動関数がもち得る「エネルギーの固有値」は離散的になることを示し、その値を、量子数 n、距離 L を使った式として求めよ。