１９９９年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学　物理学　Ⅱ

（ 200 点 ）

［ 時間　　2 時間 ］

注意　1．　問題は４頁、４問題である。
　　　2．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　3．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　4．　問題用紙は持ち帰ること。

5

I

四元数 q は，a,b,c,d を実数，i,j,k を基底としたとき，

$$q = a + bi + cj + dk$$

で表わされる．ここで，i,j,k は $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ を満足する．

問 1　実数 w,x,y,z に対して，$r = w + xi + yj + zk$ としたとき，qr を求めよ．
問 2　四元数 q に対し，$qr = 1$ となる四元数 r が一意的に存在する為の条件を a,b,c,d を用いて書け．

II

問 1　スピン 0, 質量 m の粒子がつくる場ψに対する Klein-Gordon 方程式

$$-\hbar^2\nabla^2\psi + m^2c^2\psi = 0, \tag{1}$$

を解き，ψの値はコンプトン波長，$\lambda \equiv \hbar/(mc)$，スケールで小さくなることを示せ．ただし場$\psi$は球対称であるとする．このとき，半径方向の距離を r として

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right), \tag{2}$$

である．また無限遠で$\psi = 0$ とする．[Hint: $\psi(r) = u(r)/r$と変数変換せよ.]

問 2　前問下線部は，粒子の作る場がコンプトン波長程度の距離にしか及ばないことを示している．この事実を，エネルギーと時間の間の不確定性関係，$\Delta E\Delta t \sim \hbar$, を用いて解釈せよ．

III

真空中に距離 R 離れて平行におかれた２本の長い導線に，それぞれ I_1，I_2 の電流がながれるとき，導線の単位長さあたりに働く力 F は，定数 μ_0（真空中の透磁率）を用いて，

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{R} \qquad (1)$$

と表される。電磁気学の MKSA 単位系では，I_1 と I_2 が等しく，$R = 1$ m，$F = 2\times10^{-7}$ N m^{-1} であるとき，この電流の強さを 1 A （アンペア）と定義する。

問１　定数 μ_0 の値と単位を示せ。

問２　導線１が導線２の上につくる磁束密度 B Wb m^{-2} （テスラ）を示せ。また，電流の向きと導線間に働く力の向きの関係を示せ。

電荷１Ｃ（クーロン）は，１Ａの電流が１ｓ（秒）間に運ぶ電荷量として定義される。MKSA 単位系でのクーロンの法則は，真空中に距離 R m 離れておかれた２つの電荷 q_1 C，q_2 C の間に働く力 F N を，定数 ε_0（真空中の誘電率）を用いて，

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{R^2} \qquad (2)$$

と表す。

問３　ε_0 の単位を N，m，A，s を用いて示せ。

問４　ε_0 の値を，μ_0 と真空中の光速 c の値から概算せよ。

IV

中心力場での単位質量の質点の運動を考える。中心力場では、質点は一平面内で運動し、角運動量$h = r^2 d\varphi/dt$ は保存される。ここで、(r, φ)は力の中心を原点とする極座標系上での質点の位置である。運動および軌道は、位置エネルギーを$U(r)$、全エネルギーをEとして

$$\frac{dr}{dt} = \pm\frac{\sqrt{2r^2\{E - U(r)\} - h^2}}{r}, \tag{1}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{r}{h}\sqrt{2r^2\{E - U(r)\} - h^2} \tag{2}$$

で与えられる。式(1)は、rの時間的変化は位置エネルギーが

$$W(r) = U(r) + \frac{h^2}{2r^2} \tag{3}$$

であるような直線上の運動と等価であることを示している。

いま、$W(r)$は、$r = a$において、極小値をもつとする。このとき、軌道半径aの等速円運動は安定である。

問 1 式(1)および(2)を導け。

問 2 質点が軌道半径aの円運動をするとき、その軌道周期Tは

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{U'(a)/a}}$$

と表されることを示せ。ここで、$U'(a) \equiv \frac{dU(r)}{dr}\Big|_{r=a}$である。

質点が動径方向に摂動を受けて、軌道半径aの円運動からわずかにずれた運動に移行したとする。

問 3 角運動量の変化がないとしたとき、動径方向の運動は微小振幅の単振動となることを、$W(r)$をaのまわりで展開することにより示せ。

問 4　問 3の単振動の周期T_{r}は

$$T_r = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(a) + 3U'(a)/a}}$$

と表されることを示せ。

問 5　位置エネルギーが$U(r) = Kr^s$ ($K, s =$一定)で与えられる中心力(引力)の場合を考える。質点が、T_{r}および$2T_{\mathrm{r}}$後にはじめて軌道上のもとの位置に戻る(軌道が閉じる)のは、それぞれどのような中心力のときか答えよ。ただし、軌道周期は問 2で与えられるものとする。