１９９９年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学・物理学 I

（ 200 点 ）

［　時間　　２　時間　］

注意　１．　問題は３頁、４問題である。
　　　２．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　３．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　４．　問題用紙は持ち帰ること。

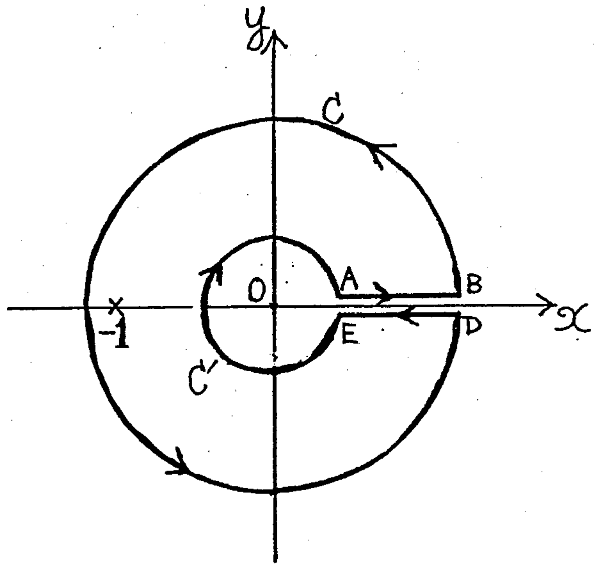
I 直交座標系 (x,y) でのラプラシアンは $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。ラプラシアンの極座標系 (r,θ) での表式を導け。但し、$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ である。

II 複素関数

$$f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z} \qquad (0 < p < 1)$$

を右図の経路に沿って積分することによって，次の実数関数の定積分を導け．

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$



III 同じハミルトニアンで記述される M 個の系 (アンサンブル) を考える．M 個の中の個々の系が，確率 $P(E_j)$ で離散的なエネルギー状態 E_j ($j = 0, 1, 2, \cdots$) をとるとする．

問 1 M 個の系をこれらの状態に分配する場合の数を W とすると，

$$\frac{1}{M}\log W = -\sum_j P(E_j)\log P(E_j) \tag{1}$$

となることを示せ．N が十分大きな値に対する Stirling の公式 $\log(N!) = N\log N - N$ を用いてよい．

問 2 $\sum_j P(E_j) = 1$ に注意し，M 個の系の平均エネルギー値 $\bar{E}$ が一定の条件下で，$\frac{1}{M}\log W$ を最大にするような $P(E_j)$ の分布は以下の形式で書けることを示せ．ただし β は定数である．

$$P(E_j) = \frac{1}{Z(\beta)}\exp(-\beta E_j), \quad Z(\beta) = \sum_j \exp(-\beta E_j) \tag{2}$$

問 3 Boltzmann の原理を用いると，この系のエントロピー S は

$$S = \frac{1}{M}k\log W \tag{3}$$

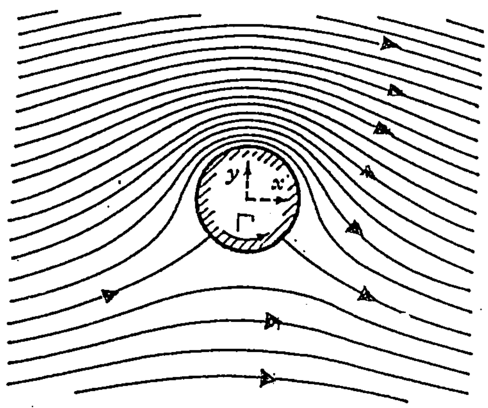
と書ける (ただし k はボルツマン定数)．これを用いて上記 β と温度 T との関係を求めよ．

問 4 系の平均エネルギー $\bar{E}$ は $\log Z(\beta)$ の β による微分を用いて表すことができることを示せ．

問 5 エネルギーが 0 と ϵ ($\epsilon > 0$) の 2 つの準位 (縮退はないものとする) を持つ N 個の十分独立した粒子が，温度 T の熱平衡状態にある場合，この系の平均エネルギー $\bar{E}$ を求めよ．

IV

速さUの一様流中においた円柱状の渦（図1）が受ける力を考える。一様流は非圧縮性，非粘性，非熱伝導性であり，外力はない。渦は何らかの方法で原点に固定されており，周囲の流れは定常流になっているものと仮定する。渦はz軸に平行に延びている半径aの円柱渦で，その外では渦度は零である。



$0<\Gamma/aU<4\pi$

図1　流れの一例。実線は流線を表わしている。

問1　速度v，渦度$\omega=\nabla\times v$，圧力p，密度ρとしてEulerの方程式から

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2\right)=v\times\omega$$

を導け。ベクトル公式　$(v\cdot\nabla)v=\nabla\frac{1}{2}v^2-v\times\omega$　を用いよ。

問2　円柱渦の外では，渦無しの流れになっている。そこで成り立つBernoulliの定理について説明せよ。

問3　円柱渦の外において，速度ポテンシャルは

$$\phi(r,\theta)=U\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta+\frac{\Gamma\theta}{2\pi}.$$

で与えられる。ここで　$r=\sqrt{x^2+y^2}$，　$\tan\theta=\frac{y}{x}$．一様流の速度Uはxの正方向に向う。$\Gamma\equiv\oint_{r=a}v\cdot dl$は渦のまわりの循環であり，反時計回りを正とする定数である。渦の表面における速度　$v(a,\theta)$　を求めよ。

問4　図1において，流体が渦に及ぼす力の方向をBernoulliの定理を用いて定性的に論ぜよ。