１９９９年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

天文学

（ 200 点 ）

［　時間　　２　時間　３０　分　］

注意　１．　問題冊子は１１頁である。
　　　２．　問題Ⅰ、Ⅱ、Ⅲのうちから、２問題を選択して解答せよ。
　　　３．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　４．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　５．　問題用紙は持ち帰ること。

I ガンマ線バーストとは、何らかの天体からのガンマ線が数秒ほど急に明るく観測される現象であり、天球上の空間分布は等方であることが知られている。この正体は長年の謎であり、それが我々の銀河系内で起きている現象なのか、またはより遠方(つまり他の銀河等)で起きているのかすらわからなかった。ここでは、ガンマ線バーストの正体がどのように探られてきたのかをみてみよう。このバースト源天体を探るには、バーストの起きた方向に何らかの天体が見いだされるかを可視光等で観測するという方法がある。例えば、ガンマ線バーストの起きた方向に、系外銀河の存在する確率が高ければ、系外銀河に起源を持つという推測が成り立つ。この方法に関する以下の問に答えよ。

問1．まず、ある1個のガンマ線バーストの起きた方向を半径 r 分角の円内(エラーサークル)に特定できたとする。また、系外銀河は、天球上の平均密度 b(個/平方分角)のランダムな分布をしているとする。今、エラーサークルを、面積の等しい n 個の小領域に分割して考える。もし、ガンマ線バーストの分布が系外銀河の分布とは独立であるとした場合に、適当に選びだしたある1個の小領域に系外銀河が見いだされる確率 p を求めよ。ただし、銀河の大きさは充分小さくて無視できるものとする。また、小領域の面積は充分小さく、1個の小領域に系外銀河が複数個入ってくることはあり得ないとする。次に、n 個の小領域のうち k 個に系外銀河が見いだされる確率 $P_k^{(n)}$ を p, n, k の関数として導け。

問2．$\lambda = np$ としたときに、λ は n に依らず一定となることを示せ。さらに、$n \to \infty$ のとき、問1で求めた式はポアソン分布 $Q_k^{(\lambda)} = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$ の形になることを示せ。ただし、次の式を使ってよい。

$$\lim_{n\to\infty}(1-\lambda/n)^n = \exp(-\lambda)$$

次に、複数個のガンマ線バーストを調べた結果を加え合わせることにより、ガンマ線バーストが系外銀河の分布とは独立であるかを調べる。g 個のガンマ線バーストを考え、それらのエラーサークル内に入る系外銀河の総和が k' 個ある確率を考えること

11

は、系外銀河の平均密度を gb とした場合の１個のガンマ線バーストのエラーサークル（半径 r 分角）内に k' 個の系外銀河が見いだされる確率を求めることに等しい。このことを用いて、次の問に答えよ。

問３．$\pi r^2 = 10$(平方分角)、$b = 0.06$(個／平方分角) として、エラーサークルの重なっていない１０個のガンマ線バーストを調べたところ、それらのエラーサークル内に入る系外銀河の総和が１３個となった。これは、ガンマ線バーストが系外銀河とは独立に起こる現象であると仮定した場合に期待される個数より大きい。したがって、両者がなんらかの関連を持つように思われるが、一方、これだけ多くの系外銀河が偶然見いだされた可能性もある。ここでは、エラーサークルの中に入る系外銀河の総和 k' が偶然１３個以上となる確率 $Q^{(\lambda)}_{k'\geq 13}$ を有効数字２桁で求めよ。この計算のため、表１を用いてよい。

表１．ポアソン分布 $Q^{(\lambda)}_i = \frac{\lambda^i}{i!}\exp(-\lambda)$

i \ λ	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	0.00610	0.00552	0.00499	0.00452	0.00409	0.00370	0.00335	0.00303	0.00274	0.00248
1	0.03109	0.02869	0.02646	0.02439	0.02248	0.02071	0.01907	0.01756	0.01616	0.01487
2	0.07929	0.07458	0.07011	0.06585	0.06181	0.05798	0.05436	0.05092	0.04768	0.04462
3	0.13479	0.12928	0.12386	0.11853	0.11332	0.10823	0.10327	0.09845	0.09377	0.08924
4	0.17186	0.16806	0.16411	0.16002	0.15582	0.15153	0.14717	0.14276	0.13831	0.13385
5	0.17529	0.17479	0.17396	0.17282	0.17140	0.16971	0.16777	0.16560	0.16321	0.16062
6	0.14900	0.15148	0.15366	0.15554	0.15712	0.15840	0.15938	0.16008	0.16049	0.16062
7	0.10856	0.11253	0.11634	0.11999	0.12345	0.12672	0.12978	0.13263	0.13527	0.13768
8	0.06921	0.07314	0.07708	0.08099	0.08487	0.08870	0.09247	0.09616	0.09976	0.10326
9	0.03922	0.04226	0.04539	0.04859	0.05187	0.05519	0.05856	0.06197	0.06540	0.06884
10	0.02000	0.02198	0.02406	0.02624	0.02853	0.03091	0.03338	0.03594	0.03859	0.04130
11	0.00927	0.01039	0.01159	0.01288	0.01426	0.01573	0.01730	0.01895	0.02070	0.02253
12	0.00394	0.00450	0.00512	0.00580	0.00654	0.00734	0.00822	0.00916	0.01018	0.01126
13	0.00155	0.00180	0.00209	0.00241	0.00277	0.00316	0.00360	0.00409	0.00462	0.00520
14	0.00056	0.00067	0.00079	0.00093	0.00109	0.00127	0.00147	0.00169	0.00195	0.00223
15	0.00019	0.00023	0.00028	0.00033	0.00040	0.00047	0.00056	0.00065	0.00077	0.00089
16	0.00006	0.00008	0.00009	0.00011	0.00014	0.00017	0.00020	0.00024	0.00028	0.00033
17	0.00002	0.00002	0.00003	0.00004	0.00004	0.00005	0.00007	0.00008	0.00010	0.00012
18	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002	0.00002	0.00003	0.00003	0.00004
19	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
20	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

さて、以下は、バースト源天体が、系外銀河のような遠方のものにあるとする説に関しての話に焦点をあてる。この場合に問題とされてきたことの1つは、放射領域のサイズであった。ガンマ線バーストの中には、立ち上がり時間 (Δt) が短くてミリ秒ほどのものもある。このことは、放射領域がおおよそ $D = c\Delta t = 3 \times 10^5$ (km/s) $\times 10^{-3}$ (s) $=$ 300 (km) 以下であることを示唆していると考えられていた。なぜなら、もし、ガンマ線バーストが、大きさ D の領域で仮に同時に瞬間的に起こったとしても、光速が有限であるために観測者にとってのバーストの立ち上がり時間は、その領域を光が進むのにかかる時間だけならされてしまうからだ。これだけ小さい領域で莫大なエネルギーが発生すると、光子同士が衝突して電子・陽電子対生成が起こりガンマ線は出てこられない。この問題を救うのが相対論的な効果だが、ここでは放射領域のサイズの問題に着目し考察してみる。

問4．図1のように、x 軸に沿って相対速度 $\vec{v}$ を持った慣性系 K、K' を考える。このとき、ローレンツ変換は次のようになる。

$dx = \gamma(dx' + vdt'),\ dy = dy',\ dz = dz',\ dt = \gamma(dt' + vdx'/c^2)$

ただし、$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ である。K' 系において速度 $\vec{u'} = (u'_x, u'_y, u'_z)$ を持った点があるとすると、K 系における速度 $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ は $\vec{u'}$ の各成分を使ってどのようにかきあらわされるかを導け。

問5．問4で求めた式を、任意の $\vec{v}$ についての式に書き換えると、

$$u_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + vu'_{\parallel}/c^2},$$

$$u_{\perp} = \frac{u'_{\perp}}{\gamma(1 + vu'_{\parallel}/c^2)}$$

となる。ただし、$\vec{u},\vec{u'}$ の、$\vec{v}$ に平行な成分を $u_{\parallel},u'_{\parallel}$ とし、$\vec{v}$ に垂直な成分を $u_{\perp},u'_{\perp}$ とする。このとき、$\tan\theta = u_{\perp}/u_{\parallel}$ を θ' と $\vec{u'}$ の大きさ u' とを用いてかきあらわせ。ただし、θ,θ' は、それぞれ K,K' 系において $\vec{u},\vec{u'}$ が $\vec{v}$ となす角度である。

問6．v が極度に相対論的速度であるとき ($v \simeq c$ つまり $\gamma \gg 1$ のとき)、図2に模式的に示したように K' 系で等方的に放射された輻射が、K 系から観測するとビー

ミングされている (ある方向に輻射が集中している)。例えば、$\theta' = \pi/2$ の方向に放射された光子は $\theta \sim 1/\gamma$ に観測されることを示せ。

問 7．光学的に厚い (奥まで見通せない) 球殻が、極度に相対論的な速度で等方的に膨張しているとする。バーストはこの球殻内で同時に瞬間的に起こるものとする。観測者がこれをみて、もし Δt の立ち上がり時間を観測したならば、この球殻の半径の上限は、$c\,\Delta t$ でなく、$2\gamma^2 c\,\Delta t$ にまで大きくなることを示せ。ただし、球殻の各々の表面要素においては、それぞれの静止系における等方的な放射を行うとする。

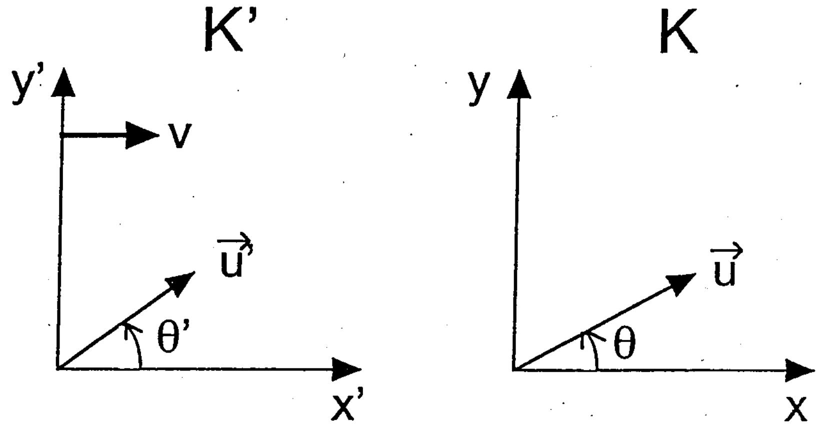

図 1

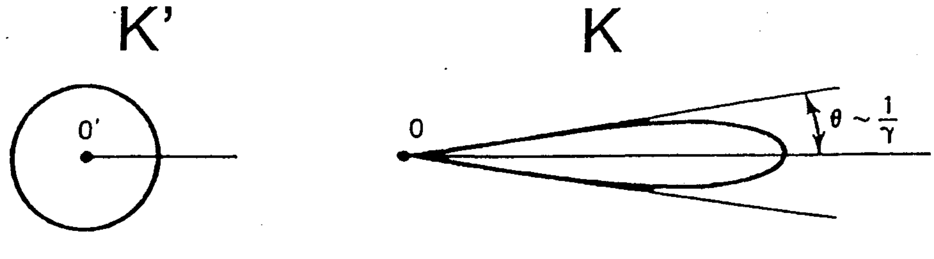

図 2

II

下の文を読み問１から問５に答えよ．

薄い一様な大気をもつ惑星Ｐが大気や地面で太陽光を散乱する場合について考える．大気中のある点における波長 λ の光の強度 I_λ は次のように定義される：光の進行方向に垂直な単位面積を通り，その方向の単位立体角内を単位時間に通過する単位波長当たりの光のエネルギーである（図１）．以下では断らない限り，波長 λ の光の強度 I_λ を単に I と表す．

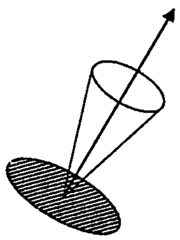

図１

図２のように大気中に微小距離 ds をとり，この ds 間に受ける光の強度の変化量を dI とすれば，

$$dI = -(\kappa + \sigma)\rho I ds + j\rho ds, \qquad (1)$$

で与えられる．ここで，κ は質量吸収係数，σ は質量散乱係数，ρ は大気密度，j は放射係数である．

$$S = j/(\kappa + \sigma), \qquad (2)$$

とおくと，（１）式は

$$\frac{1}{(\kappa + \sigma)\rho}\frac{dI}{ds} = -I + S, \qquad (3)$$

となる．Sは源泉関数と呼ばれている．大気の鉛直方向をZとし，大気の光学的厚さ τ を次のように定義する（図２）．

$$d\tau = -(\kappa + \sigma)\rho dz. \qquad (4)$$

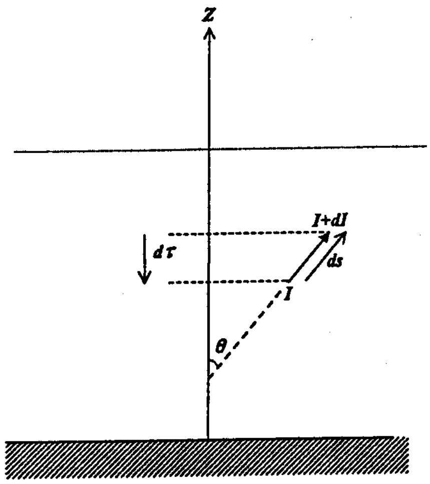

図２

また，

$$dz = \cos\theta ds, \qquad (5)$$

であるから，（４）式を用いると（３）式は

$$\mu\frac{dI}{d\tau} = I - S, \qquad (6)$$

となる．ただし，$\mu = \cos\theta$ である．

以下の問題では，惑星Ｐの大気にエネルギー流束 πF_0 の太陽光が天頂角 θ_0 の方向から入射するものとし，次の仮定をする（図３）．

（ａ）惑星Ｐの大気（光学的厚さ $\tau_0 \ll 1$）は光をすべての方向に一様に散乱する，即ち等方散乱をする．薄い大気中では光はせいぜい１回しか散乱されないとしてよい．また，ここでは可視光線のみを扱い，大気自身による発光はないとする．

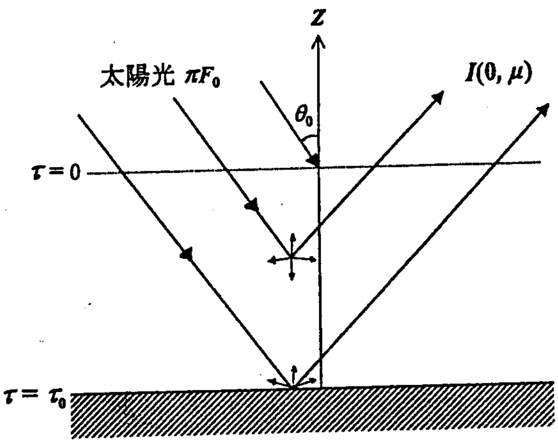

図3

（b）惑星Pの地面で散乱される光は θ_0 の方向から入射した直接光だけである．すなわち，大気で散乱された光がさらに地面で散乱される場合を無視する．

（c）地面で散乱された光の強度は方向に関係なく，一定である．

（d）地面で散乱された光は大気中で散乱されることなく直接大気外に出ていく．

上の仮定によると，散乱光の強度はZ軸のまわりの方向（方位角）には依存しないから，それを$I(\tau,\mu)$ と書くことにする．

問１　S が与えられているとすれば，大気中のレベル τ における上向きの強度 $I(\tau,\mu)$ は（6）式を τ から大気の底面の τ_0 まで積分して得られ，次式で与えられることを示せ．

$$I(\tau,\mu)=I(\tau_0,\mu)e^{-(\tau_0-\tau)/\mu}+\int_{\tau}^{\tau_0}S(\tau')e^{-(\tau'-\tau)/\mu}\frac{d\tau'}{\mu}. \qquad (1\geqq\mu>0) \quad (7)$$

問２　大気を通過して直接地面に達する太陽光のエネルギー流束は　$\pi F_0\mu_0 e^{-\tau_0/\mu_0}$　である（ただし，$\mu_0=\cos\theta_0$）．これが反射能 A の地面で散乱されるとき，地面における上向きの強度 $I(\tau_0,\mu)$ を求めよ．

ヒント：地面で散乱された光の τ_0 におけるエネルギー流束は　$2\pi\int_0^1 I(\tau_0,\mu)\mu d\mu$

である．反射能 A は地面で散乱された光のエネルギー流束と地面へ入射する光のエネルギー流束との比である．

仮定（a）～（d）のもとでは，源泉関数 S は

$$S=\pi F_0\omega\frac{1}{4\pi}e^{-\tau/\mu_0}, \qquad (8)$$

となる．ω は単散乱反射能とよばれ，

$$\omega=\frac{\sigma}{\kappa+\sigma}, \qquad (9)$$

で与えられる．すなわち，光が大気中の粒子に当たるとその光の散乱される割合は ω であり，吸収される割合は $1-\omega$ である．

問3　惑星Ｐの大気の外に出てくる光の強度 $I(0,\mu)$ はどのように表されるか．問２の結果と（8）式を用いて（7）式から導け．

位相角がゼロのときに惑星Ｐのスペクトルを観測した．そのスペクトルに，波長 λ のところで惑星大気による弱い吸収線がみられた．吸収線の深さは

$$R=\frac{I_c-I_\lambda}{I_c}, \tag{10}$$

で与えられる．ここで，I_c は連続光の強度であり，I_λ は波長 λでの放射強度である．（位相角（α）とは，惑星からみて太陽方向と地球方向のなす角である．$\alpha=0$の時には地球から見えている惑星面のすべての地点で $\mu=\mu_0$ となる．）

問4　波長 λにおける惑星大気の連続光と吸収線の光学的深さをそれぞれ τ_c，τ_λ とし，単散乱反射能を ω_c，ω_λ とするとき，

$$\omega_c\tau_c=\omega_\lambda\tau_\lambda, \tag{11}$$

であることを示せ．ただし，単散乱反射能は波長のみに依存する．

問5　吸収線の深さ R は惑星の中心から周辺へ向かってどのように変化するか．ただし，地面の反射能 A は波長に関係なく一定であるとする．また，周辺に近いところは扱わないものとして，$\tau_c/\mu\ll1$，$\tau_\lambda/\mu\ll1$ とする．

17

Ⅲ

平行平面板ガラスで、その片面がほとんどの光を反射し残りの僅かの光を透過するような鏡になっているもの二枚を、鏡面が平行に向かい合うようにして狭い距離を隔て組み合わせた光学部品をエタロンという。これに光を入射すると、鏡面を透過して鏡面間に入った光は鏡面に当たる度に一部は透過して外部に出て、残りの一部は反射して内側に戻ることを繰り返す多重反射をおこなう。

図１にはエタロンの断面と多重反射の様子を模式的に示してある。鏡面の間隔と反射率をそれぞれ ℓ および r とし、いま簡単のためにどちらも波長によらず、鏡面での光の吸収はないとする。また、ガラス板の鏡面でない面での反射も、ガラスによる光の吸収もないものとする。このような場合、波長 λ、強さ I_0 の光線をエタロンに入射角 ϕ で入射し、透過する光 I_1，I_2，I_3，・・・・・をレンズで全部を一点に集めると、その強さ I は

$$I = \frac{I_0}{1 + \dfrac{4r}{(1-r)^2}\sin^2\Delta} \qquad (1)$$

となる。ただし、空気の屈折率を１として、

$$\Delta = 2\pi \frac{\ell\cos\phi}{\lambda} \qquad (2)$$

である。

図２は、エタロンを用いて天体観測を行う場合の光学系の配置図である。望遠鏡の対物鏡（光学的な働きは凸レンズと同じ）は示されていないが図の左側遠方にある。望遠鏡の焦点の後方にフィルター、凸レンズ（第１レンズ）、エタロン、凸レンズ（第２レンズ）そして検出器を順番にならべてある。第１レンズの前側の焦点と後側の焦点がそれぞれ望遠鏡の焦点およびエタロンの中央に一致させてある。また、第２レンズの前側の焦点と後ろ側の焦点はそれぞれエタロンの中央および検出器面に一致させてある。図中の f は焦点距離で、添字０、１、２はそれぞれ望遠鏡対物鏡、第１レンズおよび第２レンズを意味する。

このような装置で、ある星雲を観測した。この星雲からは酸素イオンの５００．７ｎｍの輝線がでている。簡単のために以下では計算に用いる波長は５００ｎｍとする。用いた望遠鏡は f_0 ＝３０ｍである。フィルターによって、この酸素の輝線以外のスペクトル線がエタロンに入らないようにしてある。フィルターを透過する連続スペクトル光の強さはこの輝線に比べると無視できる程度に弱い。他のレンズはそれぞれ f_1＝３０ｃｍ、f_2＝１０ｃｍである。エタロンは ℓ＝５０μｍ、ｒ＝０．９５のものを用いた。

18

問１　式（１）において、透過光強度Iは、

$$2l\cos\phi = n\lambda \qquad (3)$$

のとき極大値をとり、その値はI_0に等しいことを示せ。ただし、nは次数と呼ばれる正整数である。

問２　上の問で示されことを、式（２）のΔの意味を説明することにより、物理的に解釈せよ。また、このとき、入射側に戻る光はどのようになっているかについてものべよ。

問３　観測した星雲の、光軸方向にある部分から来る５００ｎｍの輝線に対しては、次数nはどれだけか。

問４　光軸方向から小さな角θだけはずれた星雲の部分からの光は、第一レンズを透過したあと光軸に対して傾いた平行光束になってエタロンへ入射する。この入射角はθの何倍になるか。

問５　検出器上に得られた像は、実際の星雲像ではなく、図３のスケッチのような、光軸上の明るい点と、それを中心とする幾つかの同心円状の明るいリングの縞模様であった。広がった星雲の像がこのような縞模様になる理由を述べよ。

問６　上の縞模様のうち、内側から数えて１番目のリングにたいする次数nはどれだけか。またリングの半径はどれだけか。

問７　式（３）の関係が満たされている場合、波長がλとわずかな量$\delta\lambda$だけ異なる光にたいしては、透過強度が極大となる入射角はϕからわずかにずれる。この角のずれ$\delta\phi$は、

$$\delta\phi = -\frac{\delta\lambda}{\lambda\tan\phi} \qquad (4)$$

であることを示せ。

問８　観測されたリングを詳しく観察すると、円周には完全には沿わず、円周から内側あるいは外側に僅かにずれている円弧の部分があった。これらの部分に対応する星雲の部分のガスの運動はどんな状態にあるか推察せよ。

図1　エタロンの断面と光線

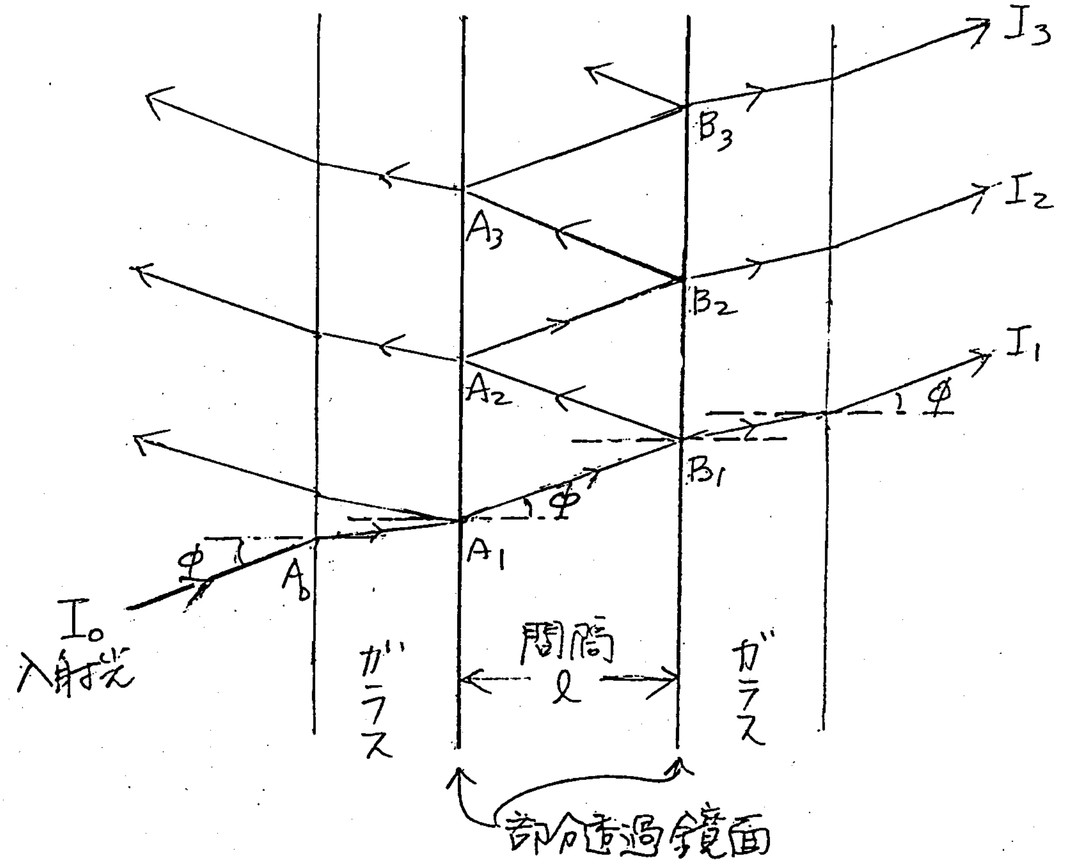

図2　観測装置光学系配置

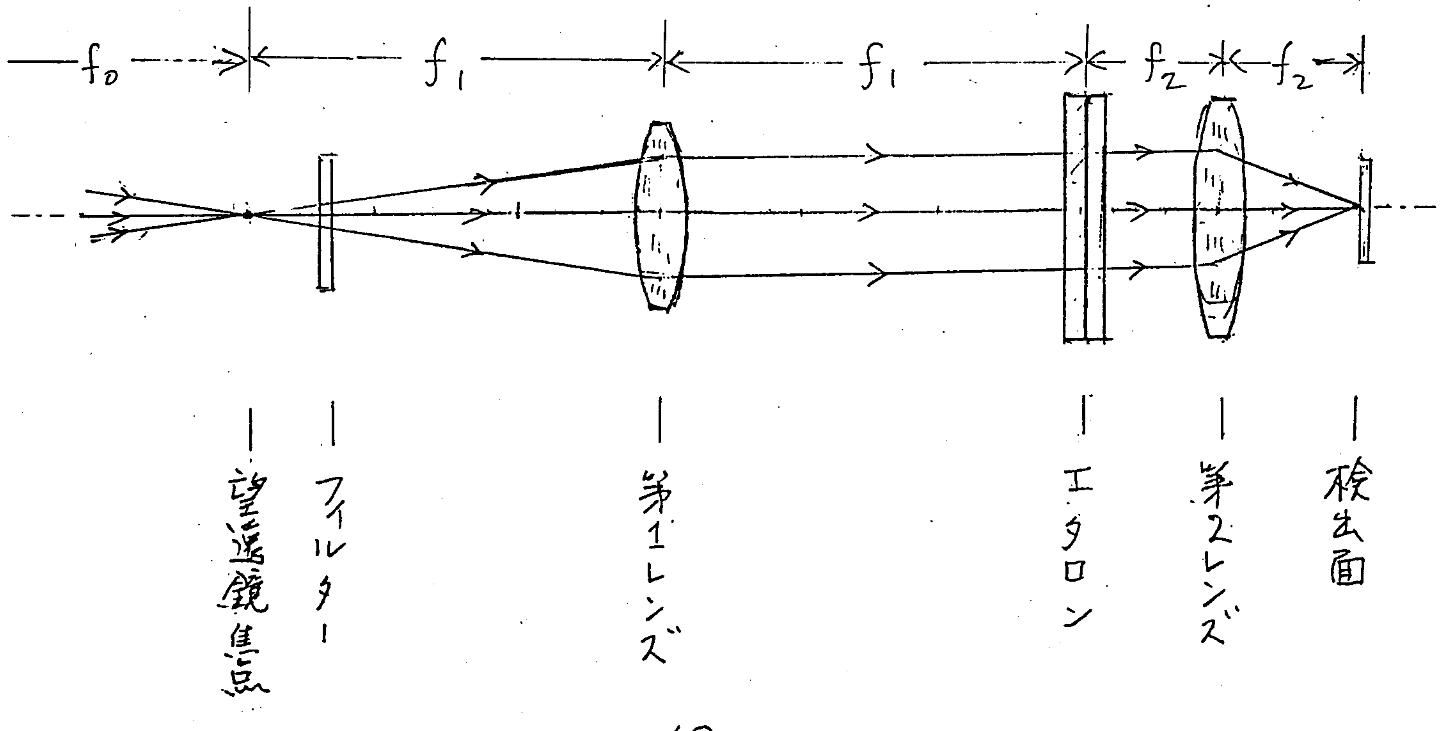

図3　検出器面上の星雲像
(明かるい部分を黒で描いてある)