１９９９年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学・物理学 I

（200点）

［　時間　　2　時間　］

注意
1．　問題は３頁、４問題である。
2．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
3．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
4．　問題用紙は持ち帰ること。

/

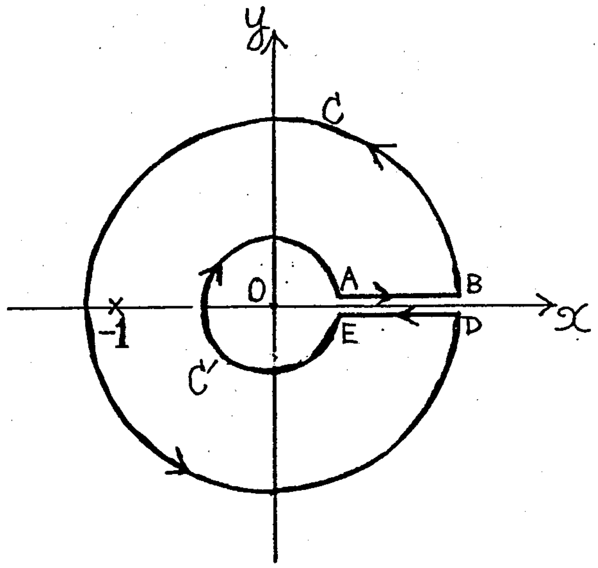
I 直交座標系 (x,y) でのラプラシアンは $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。ラプラシアンの極座標系 (r,θ) での表式を導け。但し、$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ である。

II 複素関数

$$f(z)=\frac{z^{p-1}}{1+z} \qquad (0<p<1)$$

を右図の経路に沿って積分することによって，次の実数関数の定積分を導け．

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$



2

III 同じハミルトニアンで記述される M 個の系 (アンサンブル) を考える. M 個の中の個々の系が, 確率 $P(E_j)$ で離散的なエネルギー状態 E_j ($j = 0, 1, 2, \cdots$) をとるとする.

問 1 M 個の系をこれらの状態に分配する場合の数を W とすると,

$$\frac{1}{M} \log W = -\sum_j P(E_j) \log P(E_j) \tag{1}$$

となることを示せ. N が十分大きな値に対する Stirling の公式 $\log(N!) = N \log N - N$ を用いてよい.

問 2 $\sum_j P(E_j) = 1$ に注意し, M 個の系の平均エネルギー値 $\bar{E}$ が一定の条件下で, $\frac{1}{M} \log W$ を最大にするような $P(E_j)$ の分布は以下の形式で書けることを示せ. ただし β は定数である.

$$P(E_j) = \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta E_j), \quad Z(\beta) = \sum_j \exp(-\beta E_j) \tag{2}$$

問 3 Boltzmann の原理を用いると, この系のエントロピー S は

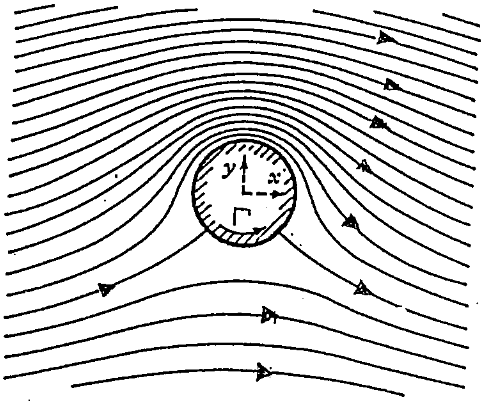
$$S = \frac{1}{M} k \log W \tag{3}$$

と書ける (ただし k はボルツマン定数). これを用いて上記 β と温度 T との関係を求めよ.

問 4 系の平均エネルギー $\bar{E}$ は $\log Z(\beta)$ の β による微分を用いて表すことができることを示せ.

問 5 エネルギーが 0 と ϵ ($\epsilon > 0$) の 2 つの準位 (縮退はないものとする) を持つ N 個の十分独立した粒子が, 温度 T の熱平衡状態にある場合, この系の平均エネルギー $\bar{E}$ を求めよ.

IV 速さUの一様流中においた円柱状の渦（図1）が受ける力を考える。一様流は非圧縮性，非粘性，非熱伝導性であり，外力はない。渦は何らかの方法で原点に固定されており，周囲の流れは定常流になっているものと仮定する。渦はz軸に平行に延びている半径aの円柱渦で，その外では渦度は零である。



$0<\Gamma/aU<4\pi$

図1　流れの一例。実線は流線を表わしている。

問1　速度$\boldsymbol{v}$，渦度$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}$，圧力$p$，密度$\rho$としてEulerの方程式から

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2\right)=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}$$

を導け。ベクトル公式　$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\nabla\frac{1}{2}v^2-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}$　を用いよ。

問2　円柱渦の外では，渦無しの流れになっている。そこで成り立つBernoulliの定理について説明せよ。

問3　円柱渦の外において，速度ポテンシャルは

$$\phi(r,\theta)=U\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta+\frac{\Gamma\theta}{2\pi}.$$

で与えられる。ここで　$r=\sqrt{x^2+y^2}$，　$\tan\theta=\frac{y}{x}$．一様流の速度Uはxの正方向に向う。$\Gamma\equiv\oint_{r=a}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}$　は渦のまわりの循環であり，反時計回りを正とする定数である。渦の表面における速度　$\boldsymbol{v}(a,\theta)$　を求めよ。

問4　図1において，流体が渦に及ぼす力の方向とBernoulliの定理を用いて定性的に論ぜよ。

１９９９年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学　物理学　II

（ 200 点 ）

［ 時間　　2 時間 ］

注意　1．　問題は４頁、４問題である。
　　　2．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　3．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　4．　問題用紙は持ち帰ること。

I

四元数 q は，a, b, c, d を実数，i, j, k を基底としたとき，

$$q = a + bi + cj + dk$$

で表わされる．ここで，i, j, k は $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ を満足する．

問 1　実数 w, x, y, z に対して，$r = w + xi + yj + zk$ としたとき，qr を求めよ．

問 2　四元数 q に対し，$qr = 1$ となる四元数 r が一意的に存在する為の条件を a, b, c, d を用いて書け．

II

問 1　スピン 0, 質量 m の粒子がつくる場ψに対する Klein-Gordon 方程式

$$-\hbar^2 \nabla^2 \psi + m^2 c^2 \psi = 0, \tag{1}$$

を解き，ψの値はコンプトン波長，$\lambda \equiv \hbar/(mc)$, スケールで小さくなることを示せ．ただし場$\psi$は球対称であるとする．このとき，半径方向の距離を r として

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right), \tag{2}$$

である．また無限遠で$\psi = 0$とする．[Hint: $\psi(r) = u(r)/r$と変数変換せよ.]

問 2　前問下線部は，粒子の作る場がコンプトン波長程度の距離にしか及ばないことを示している．この事実を，エネルギーと時間の間の不確定性関係，$\Delta E \Delta t \sim \hbar$, を用いて解釈せよ．

III

真空中に距離 R 離れて平行におかれた２本の長い導線に，それぞれ I_1，I_2 の電流がながれるとき，導線の単位長さあたりに働く力 F は，定数 μ_0（真空中の透磁率）を用いて，

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{R} \qquad (1)$$

と表される。電磁気学の MKSA 単位系では，I_1 と I_2 が等しく，$R = 1$ m，$F = 2\times10^{-7}$ N m^{-1} であるとき，この電流の強さを 1 A（アンペア）と定義する。

問１　定数 μ_0 の値と単位を示せ。

問２　導線１が導線２の上につくる磁束密度 B Wb m^{-2}（テスラ）を示せ。また，電流の向きと導線間に働く力の向きの関係を示せ。

電荷１Ｃ（クーロン）は，１Ａの電流が１ｓ（秒）間に運ぶ電荷量として定義される。MKSA 単位系でのクーロンの法則は，真空中に距離 R m 離れておかれた２つの電荷 q_1 Ｃ，q_2 Ｃ の間に働く力 F N を，定数 ε_0（真空中の誘電率）を用いて，

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{R^2} \qquad (2)$$

と表す。

問３　ε_0 の単位を N，m，A，s を用いて示せ。

問４　ε_0 の値を，μ_0 と真空中の光速 c の値から概算せよ。

IV

中心力場での単位質量の質点の運動を考える。中心力場では、質点は一平面内で運動し、角運動量$h=r^2d\varphi/dt$ は保存される。ここで、(r,φ)は力の中心を原点とする極座標系上での質点の位置である。運動および軌道は、位置エネルギーを$U(r)$、全エネルギーをEとして

$$\frac{dr}{dt}=\pm\frac{\sqrt{2r^2\{E-U(r)\}-h^2}}{r}, \tag{1}$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\pm\frac{r}{h}\sqrt{2r^2\{E-U(r)\}-h^2} \tag{2}$$

で与えられる。式(1)は、rの時間的変化は位置エネルギーが

$$W(r)=U(r)+\frac{h^2}{2r^2} \tag{3}$$

であるような直線上の運動と等価であることを示している。

いま、$W(r)$は、$r=a$において、極小値をもつとする。このとき、軌道半径aの等速円運動は安定である。

問 1 式(1)および(2)を導け。

問 2 質点が軌道半径aの円運動をするとき、その軌道周期Tは

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{U'(a)/a}}$$

と表されることを示せ。ここで、$U'(a)\equiv\frac{dU(r)}{dr}\big|_{r=a}$である。

質点が動径方向に摂動を受けて、軌道半径aの円運動からわずかにずれた運動に移行したとする。

問 3 角運動量の変化がないとしたとき、動径方向の運動は微小振幅の単振動となることを、$W(r)$をaのまわりで展開することにより示せ。

問 4　問 3の単振動の周期T_{r}は

$$T_r = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(a) + 3U'(a)/a}}$$

と表されることを示せ。

問 5　位置エネルギーが$U(r) = Kr^s$ $(K, s = 一定)$で与えられる中心力(引力)の場合を考える。質点が、T_{r}および$2T_{\mathrm{r}}$後にはじめて軌道上のもとの位置に戻る(軌道が閉じる)のは、それぞれどのような中心力のときか答えよ。ただし、軌道周期は問 2で与えられるものとする。

１９９９年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

天文学

（200 点）

［　時間　　２　時間　３０　分　］

注意　１．　問題冊子は１１頁である。
　　　２．　問題Ｉ、Ⅱ、Ⅲのうちから、２問題を選択して解答せよ。
　　　３．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　４．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　５．　問題用紙は持ち帰ること。

I ガンマ線バーストとは、何らかの天体からのガンマ線が数秒ほど急に明るく観測される現象であり、天球上の空間分布は等方であることが知られている。この正体は長年の謎であり、それが我々の銀河系内で起きている現象なのか、またはより遠方 (つまり他の銀河等) で起きているのかすらわからなかった。ここでは、ガンマ線バーストの正体がどのように探られてきたのかをみてみよう。このバースト源天体を探るには、バーストの起きた方向に何らかの天体が見いだされるかを可視光等で観測するという方法がある。例えば、ガンマ線バーストの起きた方向に、系外銀河の存在する確率が高ければ、系外銀河に起源を持つという推測が成り立つ。この方法に関する以下の問に答えよ。

問１．まず、ある１個のガンマ線バーストの起きた方向を半径 r 分角の円内 (エラーサークル) に特定できたとする。また、系外銀河は、天球上の平均密度 b(個/平方分角) のランダムな分布をしているとする。今、エラーサークルを、面積の等しい n 個の小領域に分割して考える。もし、ガンマ線バーストの分布が系外銀河の分布とは独立であるとした場合に、適当に選びだしたある１個の小領域に系外銀河が見いだされる確率 p を求めよ。ただし、銀河の大きさは充分小さくて無視できるものとする。また、小領域の面積は充分小さく、１個の小領域に系外銀河が複数個入ってくることはあり得ないとする。次に、n 個の小領域のうち k 個に系外銀河が見いだされる確率 $P_k^{(n)}$ を p, n, k の関数として導け。

問２．$\lambda = np$ としたときに、λ は n に依らず一定となることを示せ。さらに、$n \to \infty$ のとき、問１で求めた式はポアソン分布 $Q_k^{(\lambda)} = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$ の形になることを示せ。ただし、次の式を使ってよい。

$$\lim_{n\to\infty}(1-\lambda/n)^n = \exp(-\lambda)$$

次に、複数個のガンマ線バーストを調べた結果を加え合わせることにより、ガンマ線バーストが系外銀河の分布とは独立であるかを調べる。g 個のガンマ線バーストを考え、それらのエラーサークル内に入る系外銀河の総和が k' 個ある確率を考えること

は、系外銀河の平均密度を gb とした場合の１個のガンマ線バーストのエラーサークル(半径 r 分角) 内に k' 個の系外銀河が見いだされる確率を求めることに等しい。このことを用いて、次の問に答えよ。

問３．$\pi r^2 = 10$(平方分角)、$b = 0.06$(個／平方分角) として、エラーサークルの重なっていない１０個のガンマ線バーストを調べたところ、それらのエラーサークル内に入る系外銀河の総和が１３個となった。これは、ガンマ線バーストが系外銀河とは独立に起こる現象であると仮定した場合に期待される個数より大きい。したがって、両者がなんらかの関連を持つように思われるが、一方、これだけ多くの系外銀河が偶然見いだされた可能性もある。ここでは、エラーサークルの中に入る系外銀河の総和 k' が偶然１３個以上となる確率 $Q^{(\lambda)}_{k'\geq 13}$ を有効数字２桁で求めよ。この計算のため、表１を用いてよい。

表１．ポアソン分布 $Q^{(\lambda)}_i = \frac{\lambda^i}{i!}\exp(-\lambda)$

i \ λ	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	0.00610	0.00552	0.00499	0.00452	0.00409	0.00370	0.00335	0.00303	0.00274	0.00248
1	0.03109	0.02869	0.02646	0.02439	0.02248	0.02071	0.01907	0.01756	0.01616	0.01487
2	0.07929	0.07458	0.07011	0.06585	0.06181	0.05798	0.05436	0.05092	0.04768	0.04462
3	0.13479	0.12928	0.12386	0.11853	0.11332	0.10823	0.10327	0.09845	0.09377	0.08924
4	0.17186	0.16806	0.16411	0.16002	0.15582	0.15153	0.14717	0.14276	0.13831	0.13385
5	0.17529	0.17479	0.17396	0.17282	0.17140	0.16971	0.16777	0.16560	0.16321	0.16062
6	0.14900	0.15148	0.15366	0.15554	0.15712	0.15840	0.15938	0.16008	0.16049	0.16062
7	0.10856	0.11253	0.11634	0.11999	0.12345	0.12672	0.12978	0.13263	0.13527	0.13768
8	0.06921	0.07314	0.07708	0.08099	0.08487	0.08870	0.09247	0.09616	0.09976	0.10326
9	0.03922	0.04226	0.04539	0.04859	0.05187	0.05519	0.05856	0.06197	0.06540	0.06884
10	0.02000	0.02198	0.02406	0.02624	0.02853	0.03091	0.03338	0.03594	0.03859	0.04130
11	0.00927	0.01039	0.01159	0.01288	0.01426	0.01573	0.01730	0.01895	0.02070	0.02253
12	0.00394	0.00450	0.00512	0.00580	0.00654	0.00734	0.00822	0.00916	0.01018	0.01126
13	0.00155	0.00180	0.00209	0.00241	0.00277	0.00316	0.00360	0.00409	0.00462	0.00520
14	0.00056	0.00067	0.00079	0.00093	0.00109	0.00127	0.00147	0.00169	0.00195	0.00223
15	0.00019	0.00023	0.00028	0.00033	0.00040	0.00047	0.00056	0.00065	0.00077	0.00089
16	0.00006	0.00008	0.00009	0.00011	0.00014	0.00017	0.00020	0.00024	0.00028	0.00033
17	0.00002	0.00002	0.00003	0.00004	0.00004	0.00005	0.00007	0.00008	0.00010	0.00012
18	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002	0.00002	0.00003	0.00003	0.00004
19	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
20	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

さて、以下は、バースト源天体が、系外銀河のような遠方のものにあるとする説に関しての話に焦点をあてる。この場合に問題とされてきたことの1つは、放射領域のサイズであった。ガンマ線バーストの中には、立ち上がり時間 (Δt) が短くてミリ秒ほどのものもある。このことは、放射領域がおおよそ $D = c\Delta t = 3 \times 10^5$ (km/s) $\times 10^{-3}$ (s) $= 300$ (km) 以下であることを示唆していると考えられていた。なぜなら、もし、ガンマ線バーストが、大きさ D の領域で仮に同時に瞬間的に起こったとしても、光速が有限であるために観測者にとってのバーストの立ち上がり時間は、その領域を光が進むのにかかる時間だけならされてしまうからだ。これだけ小さい領域で莫大なエネルギーが発生すると、光子同士が衝突して電子・陽電子対生成が起こりガンマ線は出てこられない。この問題を救うのが相対論的な効果だが、ここでは放射領域のサイズの問題に着目し考察してみる。

問4．図1のように、x 軸に沿って相対速度 $\vec{v}$ を持った慣性系 K、K' を考える。このとき、ローレンツ変換は次のようになる。

$dx = \gamma(dx' + vdt'),\ dy = dy',\ dz = dz',\ dt = \gamma(dt' + vdx'/c^2)$

ただし、$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ である。K' 系において速度 $\vec{u'} = (u'_x, u'_y, u'_z)$ を持った点があるとすると、K 系における速度 $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ は $\vec{u'}$ の各成分を使ってどのようにかきあらわされるかを導け。

問5．問4で求めた式を、任意の $\vec{v}$ についての式に書き換えると、

$$u_\parallel = \frac{u'_\parallel + v}{1 + vu'_\parallel/c^2},$$

$$u_\perp = \frac{u'_\perp}{\gamma(1 + vu'_\parallel/c^2)}$$

となる。ただし、$\vec{u},\vec{u'}$ の、$\vec{v}$ に平行な成分を $u_\parallel, u'_\parallel$ とし、$\vec{v}$ に垂直な成分を $u_\perp, u'_\perp$ とする。このとき、$\tan\theta = u_\perp/u_\parallel$ を θ' と $\vec{u'}$ の大きさ u' とを用いてかきあらわせ。ただし、θ,θ' は、それぞれ K,K' 系において $\vec{u},\vec{u'}$ が $\vec{v}$ となす角度である。

問6．v が極度に相対論的速度であるとき ($v \simeq c$ つまり $\gamma \gg 1$ のとき)、図2に模式的に示したように K' 系で等方的に放射された輻射が、K 系から観測するとビー

ミングされている (ある方向に輻射が集中している)。例えば、$\theta' = \pi/2$ の方向に放射された光子は $\theta \sim 1/\gamma$ に観測されることを示せ。

問７．光学的に厚い (奥まで見通せない) 球殻が、極度に相対論的な速度で等方的に膨張しているとする。バーストはこの球殻内で同時に瞬間的に起こるものとする。観測者がこれをみて、もし Δt の立ち上がり時間を観測したならば、この球殻の半径の上限は、$c\,\Delta t$ でなく、$2\gamma^2 c\,\Delta t$ にまで大きくなることを示せ。ただし、球殻の各々の表面要素においては、それぞれの静止系における等方的な放射を行うとする。

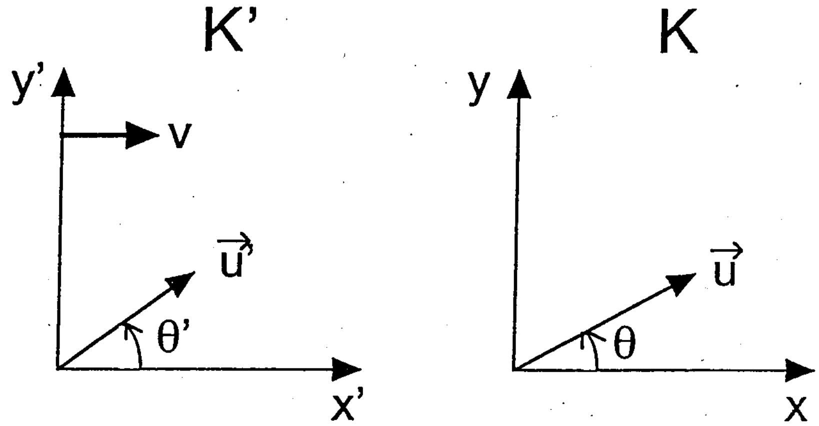


図１

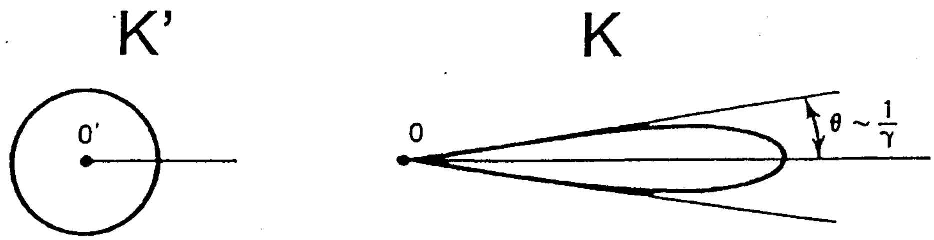


図２

II

下の文を読み問１から問５に答えよ．

薄い一様な大気をもつ惑星Ｐが大気や地面で太陽光を散乱する場合について考える．大気中のある点における波長 λ の光の強度 I_λ は次のように定義される：光の進行方向に垂直な単位面積を通り，その方向の単位立体角内を単位時間に通過する単位波長当たりの光のエネルギーである（図１）．以下では断らない限り，波長 λ の光の強度 I_λ を単に I と表す．

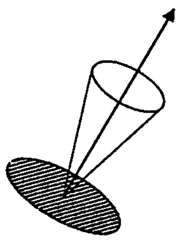


図１

図２のように大気中に微小距離 ds をとり，この ds 間に受ける光の強度の変化量を dI とすれば，

$$dI = -(\kappa+\sigma)\rho I ds + j\rho ds, \qquad (1)$$

で与えられる．ここで，κ は質量吸収係数，σ は質量散乱係数，ρ は大気密度，j は放射係数である．

$$S = j/(\kappa+\sigma), \qquad (2)$$

とおくと，（１）式は

$$\frac{1}{(\kappa+\sigma)\rho}\frac{dI}{ds} = -I + S, \qquad (3)$$

となる．Sは源泉関数と呼ばれている．大気の鉛直方向をZとし，大気の光学的厚さ τ を次のように定義する（図２）．

$$d\tau = -(\kappa+\sigma)\rho dz. \qquad (4)$$

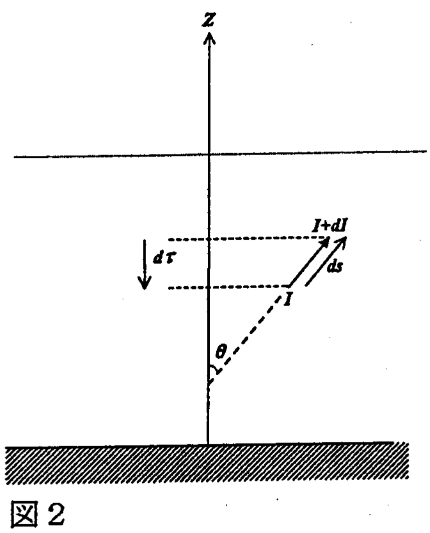


図２

また，

$$dz = \cos\theta ds, \qquad (5)$$

であるから，（４）式を用いると（３）式は

$$\mu\frac{dI}{d\tau} = I - S, \qquad (6)$$

となる．ただし，$\mu=\cos\theta$ である．

以下の問題では，惑星Ｐの大気にエネルギー流束 πF_0 の太陽光が天頂角 θ_0 の方向から入射するものとし，次の仮定をする（図３）．

（ａ）惑星Ｐの大気（光学的厚さ $\tau_0 \ll 1$）は光をすべての方向に一様に散乱する，即ち等方散乱をする．薄い大気中では光はせいぜい１回しか散乱されないとしてよい．また，ここでは可視光線のみを扱い，大気自身による発光はないとする．

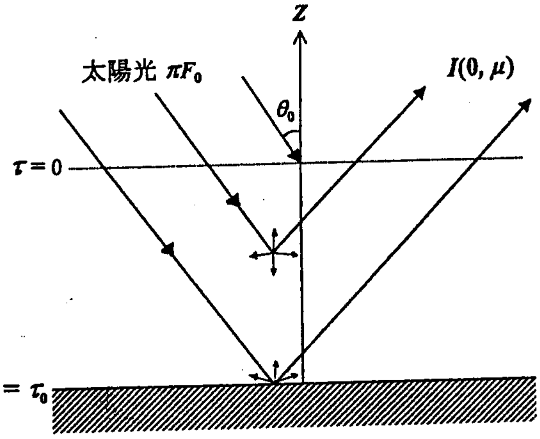


図3

（b）惑星Pの地面で散乱される光は θ_0 の方向から入射した直接光だけである．すなわち，大気で散乱された光がさらに地面で散乱される場合を無視する．

（c）地面で散乱された光の強度は方向に関係なく，一定である．

（d）地面で散乱された光は大気中で散乱されることなく直接大気外に出ていく．

上の仮定によると，散乱光の強度はZ軸のまわりの方向（方位角）には依存しないから，それを$I(\tau,\mu)$ と書くことにする．

問１　S が与えられているとすれば，大気中のレベル τ における上向きの強度 $I(\tau,\mu)$ は（6）式を τ から大気の底面の τ_0 まで積分して得られ，次式で与えられることを示せ．

$$I(\tau,\mu)=I(\tau_0,\mu)e^{-(\tau_0-\tau)/\mu}+\int_{\tau}^{\tau_0}S(\tau')e^{-(\tau'-\tau)/\mu}\frac{d\tau'}{\mu}. \qquad (1 \geqq \mu > 0) \quad (7)$$

問２　大気を通過して直接地面に達する太陽光のエネルギー流束は　$\pi F_0\mu_0 e^{-\tau_0/\mu_0}$　である（ただし，$\mu_0=\cos\theta_0$）．これが反射能 A の地面で散乱されるとき，地面における上向きの強度 $I(\tau_0,\mu)$ を求めよ．

ヒント：地面で散乱された光の τ_0 におけるエネルギー流束は　$2\pi\int_0^1 I(\tau_0,\mu)\mu d\mu$ である．反射能 A は地面で散乱された光のエネルギー流束と地面へ入射する光のエネルギー流束との比である．

仮定（a）～（d）のもとでは，源泉関数 S は

$$S=\pi F_0\omega\frac{1}{4\pi}e^{-\tau/\mu_0}, \qquad (8)$$

となる．ω は単散乱反射能とよばれ，

$$\omega=\frac{\sigma}{\kappa+\sigma}, \qquad (9)$$

で与えられる．すなわち，光が大気中の粒子に当たるとその光の散乱される割合は ω であり，吸収される割合は $1-\omega$ である．

問3　惑星Ｐの大気の外に出てくる光の強度 $I(0,\mu)$ はどのように表されるか．問２の結果と（8）式を用いて（7）式から導け．

位相角がゼロのときに惑星Ｐのスペクトルを観測した．そのスペクトルに，波長 λ のところで惑星大気による弱い吸収線がみられた．吸収線の深さは

$$R=\frac{I_c-I_\lambda}{I_c}, \tag{10}$$

で与えられる．ここで，I_c は連続光の強度であり，I_λ は波長 λでの放射強度である．（位相角（α）とは，惑星からみて太陽方向と地球方向のなす角である．$\alpha=0$ の時には地球から見えている惑星面のすべての地点で $\mu=\mu_0$ となる．）

問4　波長 λにおける惑星大気の連続光と吸収線の光学的深さをそれぞれ τ_c，τ_λ とし，単散乱反射能を ω_c，ω_λ とするとき，

$$\omega_c\tau_c=\omega_\lambda\tau_\lambda, \tag{11}$$

であることを示せ．ただし，単散乱反射能は波長のみに依存する．

問5　吸収線の深さ R は惑星の中心から周辺へ向かってどのように変化するか．ただし，地面の反射能 A は波長に関係なく一定であるとする．また，周辺に近いところは扱わないものとして，$\tau_c/\mu\ll1$，$\tau_\lambda/\mu\ll1$ とする．

Ⅲ

平行平面板ガラスで、その片面がほとんどの光を反射し残りの僅かの光を透過するような鏡になっているもの二枚を、鏡面が平行に向かい合うようにして狭い距離を隔て組み合わせた光学部品をエタロンという。これに光を入射すると、鏡面を透過して鏡面間に入った光は鏡面に当たる度に一部は透過して外部に出て、残りの一部は反射して内側に戻ることを繰り返す多重反射をおこなう。

図１にはエタロンの断面と多重反射の様子を模式的に示してある。鏡面の間隔と反射率をそれぞれlおよびrとし、いま簡単のためにどちらも波長によらず、鏡面での光の吸収はないとする。また、ガラス板の鏡面でない面での反射も、ガラスによる光の吸収もないものとする。このような場合、波長λ、強さI_0の光線をエタロンに入射角ϕで入射し、透過する光I_1，I_2，I_3，・・・・・をレンズで全部を一点に集めると、その強さIは

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2}\sin^2\Delta} \qquad (1)$$

となる。ただし、空気の屈折率を１として、

$$\Delta = 2\pi \frac{l\cos\phi}{\lambda} \qquad (2)$$

である。

図２は、エタロンを用いて天体観測を行う場合の光学系の配置図である。望遠鏡の対物鏡（光学的な働きは凸レンズと同じ）は示されていないが図の左側遠方にある。望遠鏡の焦点の後方にフィルター、凸レンズ（第１レンズ）、エタロン、凸レンズ（第２レンズ）そして検出器を順番にならべてある。第１レンズの前側の焦点と後側の焦点がそれぞれ望遠鏡の焦点およびエタロンの中央に一致させてある。また、第２レンズの前側の焦点と後ろ側の焦点はそれぞれエタロンの中央および検出器面に一致させてある。図中のfは焦点距離で、添字０、１、２はそれぞれ望遠鏡対物鏡、第１レンズおよび第２レンズを意味する。

このような装置で、ある星雲を観測した。この星雲からは酸素イオンの５００．７ｎｍの輝線がでている。簡単のために以下では計算に用いる波長は５００ｎｍとする。用いた望遠鏡はf_0 ＝３０ｍである。フィルターによって、この酸素の輝線以外のスペクトル線がエタロンに入らないようにしてある。フィルターを透過する連続スペクトル光の強さはこの輝線に比べると無視できる程度に弱い。他のレンズはそれぞれf_1＝３０ｃｍ、f_2＝１０ｃｍである。エタロンは　l＝５０μｍ、ｒ＝０．９５のものを用いた。

問１　式（１）において、透過光強度Iは、

$$2l\cos\phi=n\lambda \qquad (3)$$

のとき極大値をとり、その値はI_0に等しいことを示せ。ただし、nは次数と呼ばれる正整数である。

問２　上の問で示されことを、式（２）のΔの意味を説明することにより、物理的に解釈せよ。また、このとき、入射側に戻る光はどのようになっているかについてものべよ。

問３　観測した星雲の、光軸方向にある部分から来る５００ｎｍの輝線に対しては、次数nはどれだけか。

問４　光軸方向から小さな角θだけはずれた星雲の部分からの光は、第一レンズを透過したあと光軸に対して傾いた平行光束になってエタロンへ入射する。この入射角はθの何倍になるか。

問５　検出器上に得られた像は、実際の星雲像ではなく、図３のスケッチのような、光軸上の明るい点と、それを中心とする幾つかの同心円状の明るいリングの縞模様であった。広がった星雲の像がこのような縞模様になる理由を述べよ。

問６　上の縞模様のうち、内側から数えて１番目のリングにたいする次数nはどれだけか。またリングの半径はどれだけか。

問７　式（３）の関係が満たされている場合、波長がλとわずかな量$\delta\lambda$だけ異なる光にたいしては、透過強度が極大となる入射角はϕからわずかにずれる。この角のずれ$\delta\phi$は、

$$\delta\phi=-\frac{\delta\lambda}{\lambda\tan\phi} \qquad (4)$$

であることを示せ。

問８　観測されたリングを詳しく観察すると、円周には完全には沿わず、円周から内側あるいは外側に僅かにずれている円弧の部分があった。これらの部分に対応する星雲の部分のガスの運動はどんな状態にあるか推察せよ。

図 1　エタロンの断面と光線

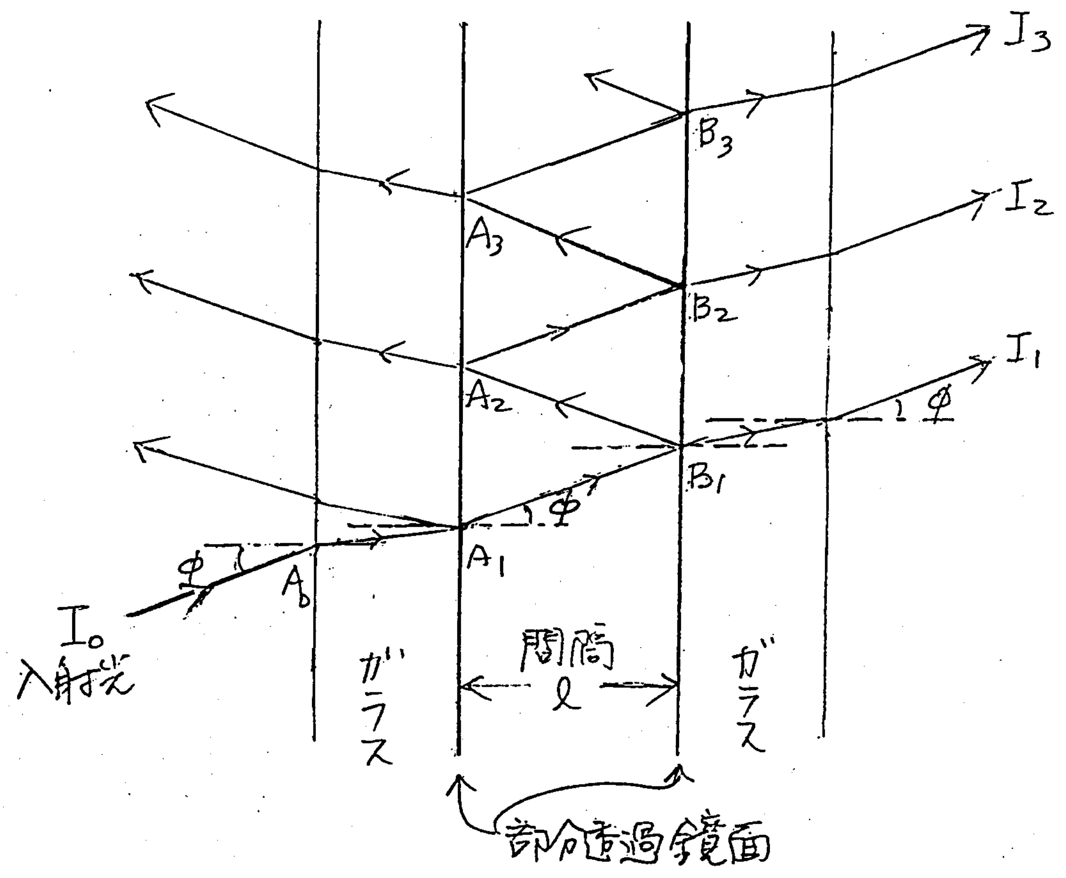


図 2　観測装置光学系配置

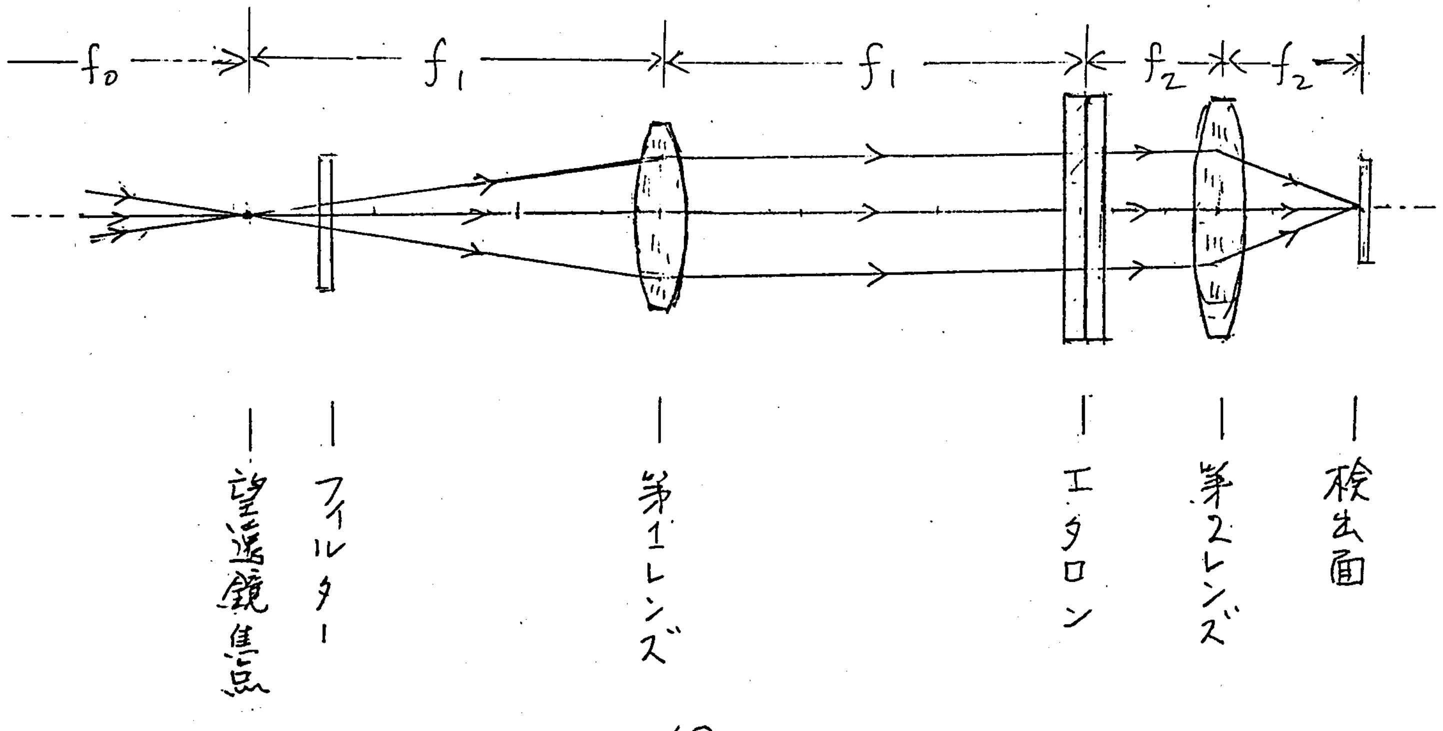
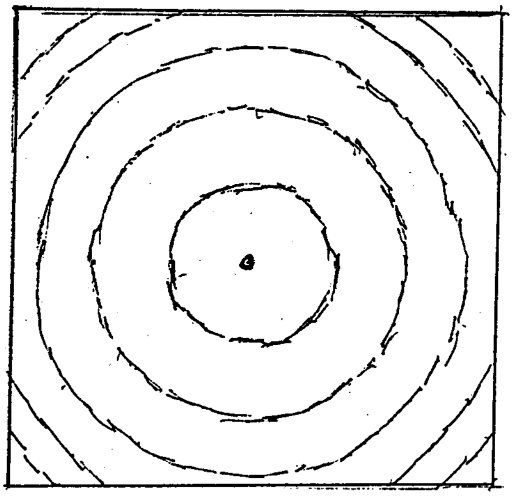


図3 検出器面上の星雲像
(明かるい部分を黒で描いてある)



１９９９年度

京都大学　大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

英語

（ 100 点 ）

［　時間　　１　時間　３０　分］

注意　１．　問題は１頁、１問題である。
　　　２．　解答は別紙に作成すること。
　　　３．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　４．　問題用紙は持ち帰ること。

ハワイでは英語が公用語であるが、多くの国から移民が入ってきたこともあり、その言語文化には独特の特徴がある。以下はその状況を解説した文章である。よく読んで設問に答えよ。

A

Not every resident of Hawaii is multilingual, but many different languages and dialects are spoken in Hawaii. We single out for comment several languages, each of which has been the mother tongue of one of the ethnic groups who have resided in Hawaii since Captain Cook's arrival, at which time, of course, Hawaiian was the language of the islands.

English is the first language of the majority of residents and its use is widespread. It has been in competition with a variety of languages, among which are those of immigrants from several countries. Contacts between speakers of these languages became numerous in the last half of the nineteenth century and early decades of the present, and inevitably influenced the English spoken in the islands. Many factors favored the dominance of English, although this dominance has been checked to some degree by the recent liberalization of immigration laws, a marked increase in visitors from Japan, and a continuing awareness by many people in Hawaii of the values of a multicultural and multilingual society.

English in Hawaii assumes a variety of styles. Mainland English is a major influence, but many people speak a recognizably regional form of the language. Some speakers of this Hawaiian English shift from one to another of its various subtypes, which have been viewed as a continuum, encompassing utterances characteristic of an English-based Hawaiian pidgin, an English-based Hawaiian creole, nonstandard Hawaiian English, or standard Hawaiian English. Each of these subtypes has characteristic features, but individual speakers do not necessarily restrict themselves in range.

Tsuzaki (1971) illustrates varying ways of expressing a single idea. To the standard (Hawaiian) English "I am eating," correspond the possible equivalents in pidgin: "Me kaukau," "Me eat," "I kaukau," or "I eat"; in creole: "I stay eat," or "I stay kaukau"; and in nonstandard: "I stay eating," or "I eating." *Kaukau* is said to be a Hawaiianization of the Chinese pidgin English *chowchow;* thus the example illustrates both grammatical and vocabulary features. For differences in pronunciation, ready examples are at hand in such words as "ship" (rhyming with "sheep") or "pet" (rhyming with "pat").

Hawaii's Japanese population stems from periods of immigration which began in 1868 and were most active from 1885 to 1924. Not all the immigrants spoke standard Japanese, but churches, language schools, travel, radio, television, movies, and newspapers make it a familiar language in Hawaii. Stores and hotels in Waikiki have recently begun to use Japanese in dealing with increasing numbers of guests from Japan. The usual way of writing Japanese employs Chinese characters (*kanji*) together with *hiragana* or *katakana*, <u>syllabic symbols to represent elements not provided by the characters: verb endings, prepositions, and the like, as well as foreign words.</u>

Approximately two-thirds of Hawaii's Japanese population originated in the prefectures of Yamaguchi, Hiroshima, Kumamoto, and Okinawa. Representatives of the last-named prefecture first reached Hawaii in 1900, and their regional form of speech is not readily understood by speakers from the Naichi or main island prefectures, where regional languages are less divergent. Okinawans may account for about one-fifth of the total Japanese population, but their language is now rarely used except among the older members of the group. English is replacing Japanese for the younger generations; Hawaii's regional Japanese tends to resemble the dialects of western Japan, rather than Tokyo standard, and shows the influence of languages with which it has been in contact—English, Hawaiian, and others.

問 1　Aの部分を原文に沿って和訳せよ。なお、Captain Cook とは、ハワイ諸島を最初に「発見」した西欧人の名前である。

問 2　I am eating の標準英語でない表現がいくつか挙げられている。文法面及び語彙面から見て、標準英語がどのように変化しているか、或はどのような置き換えがおこっているか列挙して説明せよ。

問 3　下線部 (syllabic...) はどういうことを言っているのか説明せよ。

問 4　ハワイにおける日系人の言語の特徴を 3 つあげよ。

問 5　この文章を読んで感じたことを 50 語程度の英文で書け。