１９９８年度

京都大学大学院　理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

# 応用数学・物理学　II

（ 200 点 ）

［　時間　　　2　時間　］

注意　1．　問題は５頁、４問題である。
2．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
3．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
4．　問題用紙は持ち帰ること。

# I

微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+\frac{(x-2)y}{x-x^2}+\frac{y^2}{x^2-x^3}=0$$

について次の問に答えよ。

問１　一つの特殊解　$y = u(x)$ が $x$ の１次式であることがわかっている。この特殊解を求めよ。

問２　一般解を　$y = u(x) + v(x)$ とおくことにより、この一般解を求めよ。

II

$n$ モルの理想気体の状態方程式は, 圧力 $P$, 体積 $V$, 絶対温度 $T$, 気体定数 $R$として, $PV = nRT$とあらわされる。定圧モル比熱 $C_P$, 定積モル比熱 $C_V$(ともに一定とする) の間には $C_P - C_V = R$の関係がある。また, この気体の内部エネルギー $U$は $U = nC_VT$と書ける。

問 1　$\gamma = C_P/C_V$とするとき, 理想気体の準静的断熱過程においては $PV^\gamma$ =一定となることを示せ。

問 2　この気体が初期状態 ( $T_1, V_1$) から断熱的に真空中に膨張し, 容積 $V_2$に拡がったときの温度及びエントロピーの増分を求めよ。

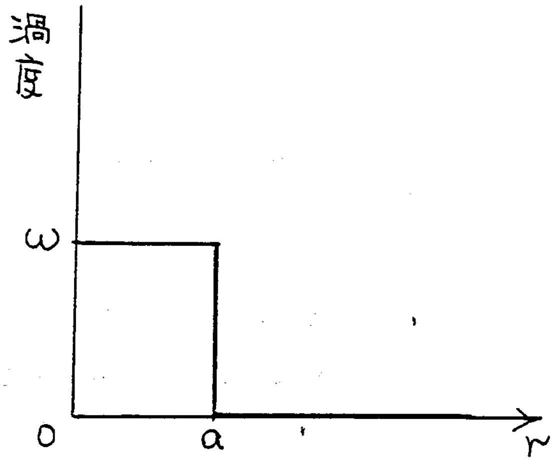


8

III 無限に広がった非圧縮性・非粘性の完全流体中に、$z$軸方向に無限に長い、円柱状で軸対称の渦系が静止している。湧き出しはない。

図に示すように、渦度は半径$a$より中で一定の値$\omega$をとり、半径$a$より外ではゼロである。

円柱座標 $(r, \theta, z)$ を用い、流れの関数を$\Psi(r)$とする。$\Psi$と$\frac{d\Psi}{dr}$は$r=a$で連続であり、かつ$r=0$で$\Psi=\frac{d\Psi}{dr}=0$を満たす。湧き出しがないので速度$v$は




図．渦度の分布

$$v = \mathrm{rot}\, A$$

と書くことができる。ここで、ベクトルポテンシャル$A$は$z$-成分のみを持ち

$$\begin{aligned} A &= (A_r, A_\theta, A_z) \\ &= (0, 0, \Psi(r)) \end{aligned}$$

の形になる。

問1．速度$v$が回転速度成分のみを持つことを示せ。

さらに渦系の中と外の回転速度の分布を求めよ。

必要ならば、公式

$$\mathrm{rot}\, a = \left( \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z},\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right)$$

を用いよ。

問2. ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の代りに、二つの関数 $\lambda$ と $\mu$ を用いて速度 $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v} = \lambda \nabla \mu, \quad \text{ただし } \operatorname{div}(\lambda \nabla \mu) = 0$$

のように表わせるとき、

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \lambda \times \nabla \mu$$

と書けることを示せ。

問3. 問1で求めた速度場に対して、$\lambda(r)$ と $\mu(\theta)$ のように変数分離を行うと、$\lambda(r)$ と $\mu(\theta)$ はそれぞれどのような物理量になるか。曲面 $\lambda=$ 一定と曲面 $\mu=$ 一定は渦系とどのような幾何学的関係にあるかを論ぜよ。

# IV

固有値 $E_n$，規格直交化された固有ベクトル $u_n$ $(n=1,2,\cdots,)$ をもつ定常ハミルトニアン $H_0$を考える。すなわち $u_n^*$を $u_n$の複素共役とすると

$$H_0 u_n = E_n u_n; \quad \int u_n^* u_k dV = \delta_{nk} \equiv \begin{cases} 1 & (n=k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases} \tag{1}$$

このハミルトニアン $H_0$に摂動 $H'$を与える。 このとき波動関数$\psi$は

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \equiv (H_0 + H')\psi \tag{2}$$

に従う。

問 1　$\psi$を展開して

$$\psi = \sum_n a_n(t) u_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \tag{3}$$

と表すとき，$a_k(t)$ は次の微分方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{da_k}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\sum_n <k|H'|n>\, a_n e^{i\omega_{kn}t} \quad (k \neq n) \tag{4}$$

ここで

$$<k|H'|n> = \int u_k^* H' u_n dV, \quad \omega_{kn} \equiv (E_k - E_n)/\hbar \tag{5}$$

問 2　$H'$を$\lambda H'$($\lambda$は小さなパラメータ) でおきかえ，$a_n$を

$$a_n = a_n^{(0)} + \lambda a_n^{(1)} + \lambda^2 a_n^{(2)} + \cdots \tag{6}$$

と展開する。 これを (4) 式に代入し，$a_k^{(s)}$ $(s=0,1,\cdots)$ に対する漸化式を求めよ。

問 3　初期状態 $m$ にある系に，$t=0$ から一定時間 $(t_0 > 0)$ 周波数$\omega$で振動する摂動 $H'(\propto \sin\omega t)$ を与える。 時刻 $t(\geq t_0)$ において，系がエネルギー $E_k(> E_m)$ をもつ状態 $k$に遷移している確率を振動数 $(\omega_{km} - \omega)$ の関数としてグラフに表し，その主ピークは $2\pi/t_0$程度の幅をもつことを示せ。(Hint: $\omega \approx \omega_{km}$として計算せよ。)

問 4　主ピークの振動数幅を，不確定性原理により説明せよ。