１９９８年度

京都大学大学院　理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学　物理学　I

（ 200 点 ）

［　時間　　　2　時間　］

注意　1.　問題は4頁、4問題である。
2.　解答は問題毎に別紙に作成すること。
3.　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
4.　問題用紙は持ち帰ること。

I

複素解析関数のコーシーの積分定理を利用して、次の実変数関数の定積分を求めよ。
但し、$a > 0$ かつ $b > 0$ とする。

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx$$

II 実数上の線型空間Vが, さらに次の公理を満たす時,Vを実計量線型空間という。

（公理） Vの２元$\mathbf{x},\mathbf{y}$に対して, 内積と称する実数 [これを $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ で表す] が定まり, 次の性質を持つ。(但し,cは実数。)

(i) $(\mathbf{x},\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2)=(\mathbf{x},\mathbf{y}_1)+(\mathbf{x},\mathbf{y}_2)$, $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\mathbf{y})=(\mathbf{x}_1,\mathbf{y})+(\mathbf{x}_2,\mathbf{y})$

(ii) $(c\mathbf{x},\mathbf{y})=c(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $(\mathbf{x},c\mathbf{y})=c(\mathbf{x},\mathbf{y})$

(iii) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})$

(iv) $(\mathbf{x},\mathbf{x})$ は 0 または正の実数で,$(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$ となるのは $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の時に限る。

問 1 n 次以下の実係数多項式空間 $\mathbf{P}_\mathrm{n}(\mathbf{R})$ は線型空間であるが, その任意の２元である多項式 f,g に対して, 内積を $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$ と定めると, この空間は実計量線型空間であることを示せ。

問 2 上記実計量線型空間 $\mathbf{P}_\mathrm{n}(\mathbf{R})$ において, 多項式を具体的に

$$F_\mathrm{k}(x)=\frac{d^\mathrm{k}}{dx^\mathrm{k}}(x^2-1)^\mathrm{k} \qquad (\mathrm{k}=0,1,....,\mathrm{n})$$

とおくと,$F_0,F_1,...,F_\mathrm{n}$は,$\mathbf{P}_\mathrm{n}(\mathbf{R})$ の基底となる。これらの基底が, 互いに直交することを示せ。
（ヒント） $G_\mathrm{k}(x)=(x^2-1)^\mathrm{k}$ とおくと、$F_\mathrm{k}(x)=G_\mathrm{k}^{(k)}(x)$（$k$階導関数）で、$i<\mathrm{k}$ なら、$G_\mathrm{k}^{(i)}(1)=G_k^{(i)}(-1)=0$

3

III

次の文章を読んで，問１から問４に答えよ。

点Oにある質量Mの物体から万有引力を受けて運動する質量mの質点（$m \ll M$）の運動は，Oを原点とする平面極座標（r，ϕ）を用いて，次の２つの式で表せる。

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{GM}{r^2} \qquad (1)$$

$$r^2\dot{\phi} = h = \mathrm{const.} \qquad (2)$$

（１）式は，変数変換 $r=1/u$ を行うと，

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} \qquad (3)$$

となる。ここで（３）式の右辺を $1/\ell$ とおく。（３）式の積分によって，質点の軌道は

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\phi} \qquad (4)$$

と書ける。ここで e は積分定数である。

問１　パラメータ h, ℓ, e の意味を，楕円軌道の場合について説明せよ。

問２　（３）式から（４）式を導け。

問３　質点のエネルギーを，m, h, ℓ，e を用いて表せ。

問４　楕円軌道を描いて地球を周回する人工衛星を考える。近地点 $r = r_{min}$ において，速さを運動方向に δv だけ増加させたとする（$\delta v \ll v$）。遠地点 $r = r_{max}$ における軌道半径の変化を

$$\frac{\delta r_{max}}{r_{max}} = f(e)\frac{\delta v}{v}$$

の形で表すとき，f（e）を求めよ。 e = 0.5 の場合，１％の速さの変化に対して，r_{max} は何％変化するか。

IV

電子密度が n で，一様なプラズマ中の電磁波の伝播について考えよう。全体として中性で伝導電流の流れていないプラズマ中の Maxwell の方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

である。ここで，

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}$$

($\mathbf{P}$ は分極，εは誘電率）である。

問 1　Maxwell の方程式より，プラズマ中の電磁波伝播の式

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

を導け。なお，任意のベクトル $\mathbf{A}$ に対して $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ である。

問 2　電磁波の電場を角振動数 ω の正弦波

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}[\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{i\omega t}],$$

とし，電子の質量を m，電荷を $-q$，位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とした時，運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

となる。この解のうち，$e^{i\omega t}$ に比例するような解，$\mathbf{r}(t)$ を求めよ。ここで，変位 $\mathbf{r}(t)$ は，電磁波の波長より，ずっと小さいものとし，電子の熱運動は無視できるものとする。

問 3　電子の変位により，プラズマ中に双極子が多数生まれる。このことによる，プラズマの分極 $\mathbf{P}$，誘電率εを求めよ。

問 4　電場を

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}[\mathbf{E}_{00} \exp(kx - i\omega t)]$$

としたとき，電磁波の振動数ωと波数 k の関係を求めよ。