１９９７年度

京都大学大学院　理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学　物理学　II

（ 200 点 ）

［ 時間　　２ 時間 ］

注意　１．　問題は６頁、４問題である。
　　　２．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　３．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　４．　問題用紙は持ち帰ること。

4

I

偏微分方程式について下の問に答えよ．

問１　次の偏微分方程式の一般解 $z = z(x, y)$ を求めよ．

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

問２　境界条件 $z(x, y = 0) = \sin \varepsilon x \sin x$ （$\varepsilon \neq 0$）を満たす問１の解を求めよ．

参考：ラグランジュの偏微分方程式

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

の一般解は次のように求めることができる．

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

の二つの独立な解を $u(x, y, z) = c_1$,　$v(x, y, z) = c_2$ （c_1，c_2 は任意定数）とするとき，

$$v = \psi(u) \quad （\psi \text{ は任意関数}）$$

で与えられる．

Ⅱ

一様な物質からなり、断面が長方形である棒を、図のように左の端面を鉛直な壁に貼りつけ，右の端に鉛直下向きの力を加えたところ，棒は円弧状にたわんだ．棒の自重を無視して、たわみの大きさを求めよう。

棒の右端面は棒の長さ方向の中心軸（弧ＯＡ。以下では、中心軸という）に対して垂直を保ったままであるとする。この場合、棒の上側の部分では伸びが、下側の部分では縮みが生じている。したがって、上側では縮もうとする力が働き、下側では伸びようとする力が働く。中心軸に垂直な断面（以下では、棒の断面という）上の単位面積当りで表したこの力を応力という。棒の厚さ方向の中間には伸びも縮みもない面（弧ＯＡに沿う紙面に垂直な曲面）が存在し、これを中立面という。

応力の大きさは、もとの長さに対する伸びまたは縮みの割合に比例し、その比例係数はヤング率である．

問１．中心軸上にある点Ｐを通る棒の断面より右側の部分（図で斜線を施した部分）に着目する。点Ｐにおける中立面の曲率半径をＲとし、点Ｐから曲率半径方向に距離ｒだけ離れた点では、この点を通る棒の断面において左側から応力を受ける。この応力の大きさｐは，

$$p = \frac{Er}{R} \qquad (1)$$

であることを示せ．ここに，Ｅはヤング率である．

問２．上で求めた応力は棒の上側と下側とで向きが反対である。つまり、応力によるモーメントが点Ｐの回りに働いている。点Ｐを通る棒の断面の全面にわたる応力によって、点Ｐを通り紙面に垂直な軸（以下、軸Ｐという）の回りに働くモーメントの大きさＭは，

$$M = \frac{ab^3E}{12R} \qquad (2)$$

となることを示せ．ここに、ａ，およびｂは，それぞれ棒の幅、および厚さである。

問３．一方、棒の右端に加えた力によって軸Ｐの回りに逆向きのモーメントが働いており、このモーメントと前問で求めたモーメントとがつりあっている。

固定端から点Ｐまでの距離をｘとし、また、鉛直上向きにｙ軸をとって、中立面の方程式を $y = y(x)$ と書けば、たわみが小さいとき、点Ｐ（ｘ，ｙ）における曲率半径は $-(d^2y/dx^2)^{-1}$ と近似できる。

この場合、微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12W(x-L)}{ab^3E} \qquad (3)$$

が成り立つことを示せ．ここに、Ｌは棒の長さ、Ｗは棒に加えた力の大きさである。

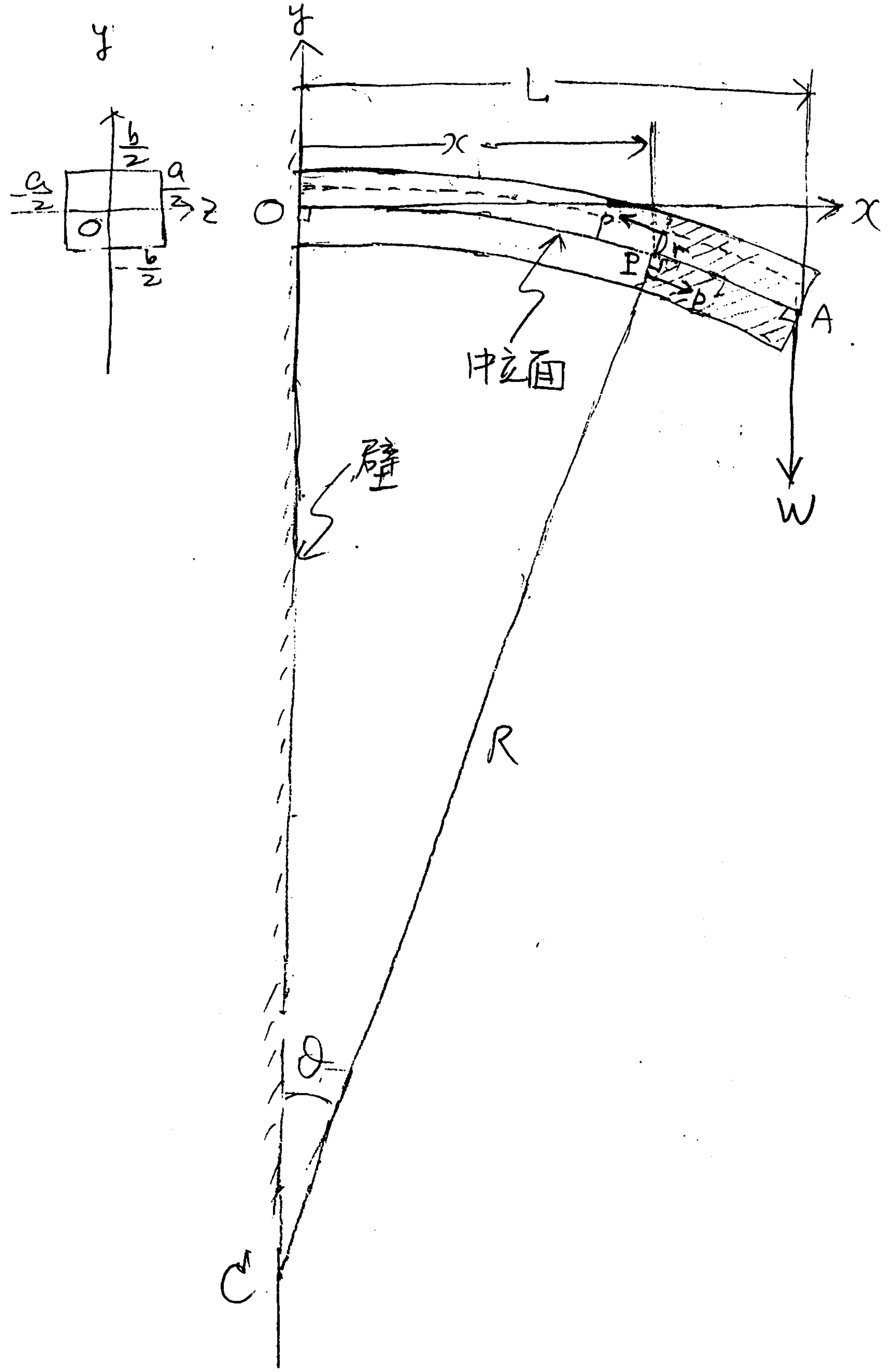
問４．力を加えられている棒の端は，固定されている端に較べて

$$\frac{4WL^3}{ab^3E}$$

だけ下がっていることを示せ．

6

壁面(x=0)での図　　xy平面での図



7

III

スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\mathbb{A}$ を用いると，電場 $\mathbb{E}$ と磁束密度 $\mathbb{B}$ は

$$\mathbb{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\mathbb{B} = \operatorname{rot}\mathbb{A} \tag{2}$$

と表わすことができる。付加条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \operatorname{div}\mathbb{A} = 0 \tag{3}$$

を課すと，ϕ と $\mathbb{A}$ は

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

$$\nabla^2\mathbb{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbb{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbb{j}}{\varepsilon_0 c^2} \tag{5}$$

を満す。ここで ρ と $\mathbb{j}$ は電荷密度と電流密度を表わす。c は光速，ε_0 は真空の誘電率である。

電場 $\mathbb{E}$ と磁束密度 $\mathbb{B}$ は，マックスウエルの方程式

$$\operatorname{div}\mathbb{E} = \boxed{} \tag{6}$$

$$\operatorname{rot}\mathbb{E} = \boxed{} \tag{7}$$

$$\operatorname{div}\mathbb{B} = 0 \tag{8}$$

$$c^2 \operatorname{rot}\mathbb{B} = \boxed{} + \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \tag{9}$$

に従う。

8

問1. 方程式 (1), (2), (3), (4), (5) を用いて, 方程式 (6), (7), (9) を完成せよ。 ただしベクトル公式 $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ を用いよ。

問2. 付加条件 (3) を何ゲージというか。その名の由来について簡単に述べよ。

問3. $\mathrm{div}\,\mathbf{E}$ と $\mathrm{div}\,\mathbf{B}$ が, 方程式 (6) と (8) のように, 異った方程式に従う理由を述べよ

問4. 電磁エネルギーの式

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2 + \varepsilon_0 c^2 B^2}{2}\right) = \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} + \mathrm{div}\,(\varepsilon_0 c^2\, \mathbf{E}\times\mathbf{B})$$

を導き, 右辺の二つの項の物理的意味を述べよ.

Ⅳ　内部構造のない粒子が中心対称ポテンシャル場 V(r) 中に存在するとき、その分布状態を記述する波動関数Ψの空間部分は、動径関数 R(r) と角度関数 Y(θ, φ)に分離できる。ここで、(r、θ、φ) は極座標である。動径関数 R(r) の Schrödinger 方程式は、 R(r)=u(r)/r とおくと

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2}+\left\{V(r)+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}u=Eu \tag{1}$$

となる。ここで m は粒子の質量、E は粒子のエネルギー、$\hbar = h/2\pi$ （h はプランク定数）である。

問１　(1) 式での l の意味を記せ。

問２　$V(r)\propto 1/r$ のとき、$r\to 0$ での (1) 式の解を求め、原点付近での粒子の存在確率と l の関係を記せ。

問３　１組の（E, l）に対して、たかだか１つの動径関数（u=0 を除く）が対応していることを示せ。