１９９７年度

京都大学大学院　理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

応用数学　物理学　I

（ 200 点 ）

［　時間　　2　時間　］

注意　1．　問題は４頁、４問題である。
　　　2．　解答は問題毎に別紙に作成すること。
　　　3．　答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
　　　4．　問題用紙は持ち帰ること。

//

I

次の問に答えよ。

問1. 2次方程式 $x^2+1=0$ の解は $x=\pm i$ である。

対応する2×2実行列の2次方程式

$$X^2+1=0, \quad 1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

の一般解を求めよ。

問2. Xが実交代行列であるという条件をつけると，解は一意的に決まり

$$X=\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

になることを示せ。

問3. $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$ を求めよ。

問4

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}iz & ix-y\\ ix+y & -iz\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

を計算せよ。

Ⅱ

$a(>0), x$ を実数として次の問に答えよ.

(1) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin x dx = \frac{1}{1+a^2}$

であることを示せ.

(2)

$$\int_0^\infty \frac{\sin a}{\sqrt{a}} da = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

であることを示せ.

必要ならば,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-ax^2} dx$$

$$1 + x^4 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x$$

を用いよ.

III

一様で熱力学的に平衡状態にある、輻射（放射）と非相対論的ガスとからなる系を考え、その系の比熱比 Γ を求める。温度を T, ガスの密度を ρ とする。熱平衡状態での、単位体積当たりの輻射のエネルギーは aT^4, 輻射圧は $aT^4/3$ である。ここで、 a は輻射定数である。以下では、簡単のために、ガスは完全電離した水素ガスからなる理想気体であるとし、水素原子の質量を m_H、 ボルツマン定数を k とする。

1) ガス圧を p_g としてガスの状態方程式を書け。

2) 単位体積当たりのガスと輻射のエネルギーの和を ρ と T を使って表せ。

3) 全圧力（ガス圧 p_g と輻射圧 p_r の和）を ρ と T を使って表せ。

4) 系が断熱的に変化したとする。全圧の変化量, δp, および密度の変化量, $\delta\rho$, の間の関係式を熱力学的考察から導け。

5) 断熱変化の場合、全圧 p と密度 ρ は微小変化に対して $p \propto \rho^{\Gamma}$ に従って変化する。比熱比 Γ を $\beta[= p_g/(p_g + p_r)]$ を使って表せ。

6) $\beta = 0$ および $\beta = 1$ の極限で、比熱比はそれぞれいくらになるか。

IV

非圧縮性完全流体の渦無し運動を考えよう。速度場はポテンシャル関数ϕを用いて$\mathbf{v} = \nabla\phi$と書ける。

問1　連続の式、Euler の式より

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{1}$$

および

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = f(t) \tag{2}$$

と書けることを示せ。ここで、$f(t)$ は時間だけの任意関数である。

問2　無限遠では静止している流体の中を、半径 Rの球が速度 $\mathbf{u}(t)$ で運動している。このとき、球の表面上での、速度場に対する境界条件を求めよ

問3　問2の条件のもとで、流体の速度場を求めよ。
[Hint] ポテンシャルは、球の中心からの距離を rとすると $\phi = \mathbf{A}\cdot\nabla(1/r)$ ($\mathbf{A}$ は時間だけの関数) と書けることを用いよ。