１９９７年度

京都大学大学院　理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問　問題

天文学

（200点）

［　時間　　２　時間　３０　分　］

注意
1. 問題冊子は４頁である。
2. 問題Ⅰ、Ⅱ、Ⅲのうちから、２問題を選択して解答せよ。
3. 解答は問題毎に別紙に作成すること。
4. 答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
5. 問題用紙は持ち帰ること。

16

I

一様等方な宇宙を仮定すると、その時空の計量は

$$ds^2 = c^2dt^2 - R(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right] \tag{1}$$

で与えられる。ここに、ds は線素、r, θ, φ は共動座標系（宇宙膨張にのった座標系）を極座標で表したもので、無次元量である。t は宇宙の各点で共通な時間、c は光速を示す。kは時空の構造によって、$-1, 0, 1$ のいずれかの値をとる。$R(t)$ はスケールファクターと呼ばれる、長さの次元を持つ量で、膨張宇宙では時間と共に変化し、その時間変化は、アインシュタイン方程式と、宇宙の平均密度と平均圧力との間の関係（状態方程式）によって与えられる。以下では、平均圧力はゼロとする。

問 1　座標 $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ に固定された天体 A から $t = t_1$に放射された光を、座標 $(0, 0, 0)$ に固定された観測者 B が、$t = t_0$（これを現在とする）で受けたとする。この場合、（１）式は、$ds^2 = 0$ で、$d\theta = d\varphi = 0$ として一般性を失わないので、

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = c\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \tag{2}$$

が成立する。さらに、$t = t_1 + \delta t_1$に A から放射された光が、$t = t_0 + \delta t_0$に B に到着したとすると、（２）式より $\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{R(t)}$ である。$\delta t_1, \delta t_0$の間の $R(t)$ の変化が無視できるとすれば、

$$\frac{\delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\delta t_1}{R(t_1)} \tag{3}$$

が成り立つことを示せ。

問 2　$t = t_1$に A から放射された光の振動数がν_1（波長λ_1）、B で $t = t_0$に受けた時の振動数はν_0（波長λ_0）だったとする。

$$\nu_0 = \nu_1 \frac{R(t_1)}{R(t_0)} \tag{4}$$

であることを（３）式を利用して示せ。

ここで、観測量である赤方偏移 zを、

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0} \tag{5}$$

で定義すると（λ_1, ν_1はそれぞれ静止系での波長、周波数）、（４）式より

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} \tag{6}$$

である。

問 3　（２）式を積分することによって、$t = t_0$における AB 間の距離 $D(= r_1 R(t_0))$ を、zを用いて求めたい。$k = 0$ の場合、

$$D = \frac{2c}{H_0}\left[1 - (1+z)^{-1/2}\right] \tag{7}$$

となることを示せ。但し、光速 c と $H_0(t = t_0$における $\frac{dR}{dt}/R)$ は既知とする。

ヒント：$x = \frac{R(t)}{R(t_0)}$とおくとよい。またこの場合、アインシュタイン方程式より、$(\frac{dR}{dt})^2 R =$一定、である。

17

問 4　A は光度 L ($\mathrm{erg\ s^{-1}}$) で光を放射しているとする。$t = t_1$に発せられた光は $t = t_0$には $4\pi D^2$ の面に到達するが、B で単位時間、単位面積当たりに受けるエネルギー (f) は、

$$f = \frac{L}{4\pi D^2 (1+z)^2} \tag{8}$$

となることを（3）式、（4）式に注意して示せ。

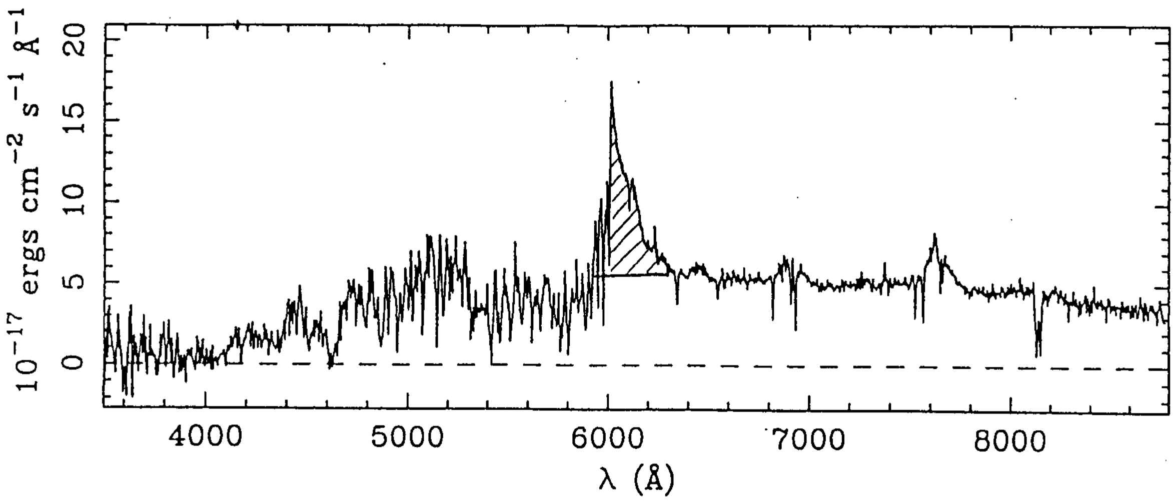
天体 A のスペクトルとして下図を得た。図の横軸は観測波長、縦軸は観測された単位時間、単位面積、単位波長当たりのエネルギーである。波長 6000Å のところに見られる輝線はライマンα線で、静止系での波長は約 1200Å である。

問 5　以下の問では有効数字 1 桁で答えてよい。

（1）この天体の赤方偏移 zを求めよ。

（2）このライマンα輝線の単位時間、単位面積当たりのエネルギー (f) は、図中斜線部の面積に相当する。fを求めよ。

（3）$k = 0$ の場合について、このライマンα輝線の光度を求めよ。但し、$c = 3 \times 10^{10}$ $\mathrm{cm\ s^{-1}}$、$1\,\mathrm{Mpc} = 3 \times 10^{24}$ cm であり、$H_0 = 100\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$とする。



18
~~17~~

II

一様な媒質 (密度ρ_1) において超新星爆発が起こり、莫大なエネルギー (E) が、狭い領域において急激に解放されたとする。すると図1に示したように、超新星爆発により発生した衝撃波は、まわりのガスをはき集めながら球対称に広がり、はき集められたガスは衝撃波により加熱され、ホットバブルを形成する。このような場合、爆発の中心から衝撃波の位置までの距離 ($r_{\rm sh}$) は爆発からの経過時間 (t) のべき関数で与えられることが知られており、そのべきは次元解析の手法を用いて簡単に求めることができる。

問1　長さ、時間、質量の次元をそれぞれ、L、T、Mとすると、密度、エネルギーの次元はそれぞれどう表されるか。

問2　与えられた物理量、ρ_1とEを組み合わせて、無次元量をつくる。すなわち

$$\xi \equiv r t^{\ell} \rho_1^{m} E^{n} \tag{1}$$

とおき、ξが無次元量に (L、T、Mによらなく) なるようにℓ、m、nを決めよ。ここでrは爆発の中心からの距離である。衝撃波のたつ位置 ($r_{\rm sh}$) は$t^{2/5}$に比例して増加すること、およびその広がる速度 ($U_{\rm sh}$) は$t^{-3/5}$に比例して減少することを示せ。なお衝撃波は、(1) 式において$\xi = 1$とおいた位置にたつとする。

問3　今、$E = 10^{51.0}$erg、$\rho_1 = 10^{-24.0}$g cm^{-3}としたとき、10^n年後の衝撃波の位置 ($r_{\rm sh}$; pc) を、nの関数として求めよ (nは実数)。なお1年$=10^{7.5}$秒、1pc$=10^{18.5}$cmとする。

問4　上記の評価が使えるのは、衝撃波がはき集めたガスの量が超新星爆発に伴って放出されたガスの量を越えてから、広がった高温ガスが放射により冷えてしまうまでである。爆発によって放出されたガスの質量が$10^{33.0}$g、放射冷却の効率が単位体積あたり毎秒$\Lambda = 10^{-21.0}$erg のとき、上記の評価が有効なのは、いつからいつまでか。なおホットバブルの中は一様とする。また簡単のため、Λは時間によらず一定とし、$\log_{10}(4\pi/3) \simeq 0.6$と近似することにする。

問5　超新星爆発が連続して起きており、単位時間あたりのエネルギー発生量が一定とみなせる場合、ホットバブルの半径は時間の何乗に比例して大きくなるか。

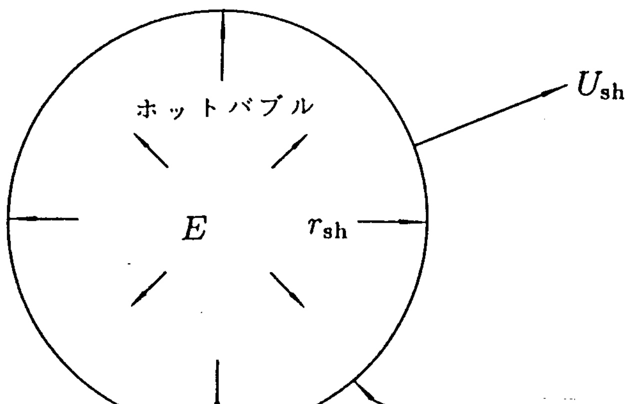


図1

17 ~~18~~

III

問 1　質量 M, 半径 a の星の外側に水素原子だけからなる大気が，星の半径にくらべて十分大きな空間をみたしている．　温度 T は星の中心からの距離 r の関数であり，大気は静力学平衡をたもっている．　$T(r) = T(a)(a/r)^{\alpha}$ としたとき，無限遠において $P = 0$ となるために α のとりうる範囲を定めよ．ただし P は大気の圧力であり，水素原子の電離は考えないものとする．

問 2　この大気内の温度分布 $T(r)$ は r の増加する方向に熱伝導による定常的な熱エネルギー流によって定まるとしよう．　熱伝導率 K が

$$K = \kappa_0 T^{5/2} \qquad (\kappa_0 \text{は定数})$$

によって与えられるとき，大気内の温度分布 $T(r)$ を求めよ．　また星の中心を中心とする球面を通過する単位時間当りの熱エネルギー流量を求めよ．　この場合星の表面 $(r = a)$ において温度は常に一定にたもたれており，また無限遠においては $T = 0$ と仮定せよ．

問 3　圧力 P が無限遠において有限値を示すときには，大気は静力学平衡をたもつことができず，r の増加する方向に定常的なガス流が生じる．　このガス流は球対称であると考えて，ガス流の速度 $v(r)$，水素原子数密度 $n(r)$ を記述する方程式をみちびけ．

20
19