

1997年度

京都大学大学院 理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問 問題

応用数学 物理学 I

(200 点)

[時間 2 時間]

- 注意
1. 問題は4頁、4問題である。
 2. 解答は問題毎に別紙に作成すること。
 3. 答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
 4. 問題用紙は持ち帰ること。

I
次の問に答えよ。

問1. 2次方程式 $x^2+1=0$ の解は $x=\pm i$ である。
対応する 2×2 実行列の2次方程式

$$X^2 + \mathbf{1} = 0, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の一般解を求めよ。

問2. X が交代行列であるという条件をつけると、
解は一意的に決まる

$$X = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

になることを示せ。

問3. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ を求めよ。

問4

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iz & ix-y \\ ix+y & -iz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

を計算せよ。

II

$a(> 0), x$ を実数として次の間に答えよ.

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx = \frac{1}{1+a^2}$$

であることを示せ.

(2)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin a}{\sqrt{a}} da = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

であることを示せ.

必要ならば,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

$$1+x^4 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}x$$

を用いよ.

III

一様で熱力学的に平衡状態にある、輻射（放射）と非相対論的ガスとからなる系を考え、その系の比熱比 Γ を求める。温度を T 、ガスの密度を ρ とする。熱平衡状態での、単位体積当たりの輻射のエネルギーは aT^4 、輻射圧は $aT^4/3$ である。ここで、 a は輻射定数である。以下では、簡単のために、ガスは完全電離した水素ガスからなる理想気体であるとし、水素原子の質量を m_H 、ボルツマン定数を k とする。

- 1) ガス圧を p_g としてガスの状態方程式を書け。
- 2) 単位体積当たりのガスと輻射のエネルギーの和を ρ と T を使って表せ。
- 3) 全圧力（ガス圧 p_g と輻射圧 p_r の和）を ρ と T を使って表せ。
- 4) 系が断熱的に変化したとする。全圧の変化量, δp , および密度の変化量, $\delta\rho$, の間の関係式を熱力学的考察から導け。
- 5) 断熱変化の場合、全圧 p と密度 ρ は微小変化に対して $p \propto \rho^\Gamma$ に従って変化する。比熱比 Γ を $\beta [= p_g/(p_g + p_r)]$ を使って表せ。
- 6) $\beta = 0$ および $\beta = 1$ の極限で、比熱比はそれぞれいくらになるか。

IV

非圧縮性完全流体の渦無し運動を考えよう。速度場はポテンシャル関数 ϕ を用いて $\mathbf{v} = \nabla\phi$ と書ける。

問1 連続の式、Euler の式より

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (1)$$

および

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = f(t) \quad (2)$$

と書けることを示せ。ここで、 $f(t)$ は時間だけの任意関数である。

問2 無限遠では静止している流体の中を、半径 R の球が速度 $\mathbf{u}(t)$ で運動している。このとき、球の表面上での、速度場に対する境界条件を求めよ

問3 問2 の条件のもとで、流体の速度場を求めよ。

[Hint] ポテンシャルは、球の中心からの距離を r とすると $\phi = \mathbf{A} \cdot \nabla(1/r)$ (\mathbf{A} は時間だけの関数) と書けることを用いよ。

1997年度

京都大学大学院 理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問 問題

応用数学 物理学 II

(200 点)

[時間 2 時間]

- 注意
1. 問題は6頁、4問題である。
 2. 解答は問題毎に別紙に作成すること。
 3. 答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
 4. 問題用紙は持ち帰ること。

I

偏微分方程式について下の問に答えよ.

問1 次の偏微分方程式の一般解 $z = z(x, y)$ を求めよ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

問2 境界条件 $z(x, y=0) = \sin \varepsilon x \sin x$ ($\varepsilon \neq 0$) を満たす問1の解を求めよ.

参考: ラグランジュの偏微分方程式

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

の一般解は次のように求めることができる.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

の二つの独立な解を $u(x, y, z) = c_1$, $v(x, y, z) = c_2$ (c_1, c_2 は任意定数) とするとき,

$$v = \psi(u) \quad (\psi \text{ は任意関数})$$

で与えられる.

II

一様な物質からなり、断面が長方形である棒を、図のように左の端面を鉛直な壁に貼りつけ、右の端に鉛直下向きの力を加えたところ、棒は円弧状にたわんだ。棒の自重を無視して、たわみの大きさを求めよう。

棒の右端面は棒の長さ方向の中心軸（弧 OA 。以下では、中心軸という）に対して垂直を保ったままであるとする。この場合、棒の上側の部分では伸びが、下側の部分では縮みが生じている。したがって、上側では縮もうとする力が働き、下側では伸びようとする力が働く。中心軸に垂直な断面（以下では、棒の断面という）上の単位面積当りで表したこの力を応力という。棒の厚さ方向の中間には伸びも縮みもない面（弧 OA に沿う紙面に垂直な曲面）が存在し、これを中立面という。

応力の大きさは、もとの長さに対する伸びまたは縮みの割合に比例し、その比例係数はヤング率である。

問 1. 中心軸上にある点 P を通る棒の断面より右側の部分（図で斜線を施した部分）に着目する。点 P における中立面の曲率半径を R とし、点 P から曲率半径方向に距離 r だけ離れた点では、この点を通る棒の断面において左側から応力を受ける。この応力の大きさ p は、

$$p = \frac{E r}{R} \quad (1)$$

であることを示せ。ここに、 E はヤング率である。

問 2. 上で求めた応力は棒の上側と下側とで向きが反対である。つまり、応力によるモーメントが点 P の回りに働いている。点 P を通る棒の断面の全面にわたる応力によって、点 P を通り紙面に垂直な軸（以下、軸 P という）の回りに働くモーメントの大きさ M は、

$$M = \frac{a b^3 E}{12 R} \quad (2)$$

となることを示せ。ここに、 a 、および b は、それぞれ棒の幅、および厚さである。

問 3. 一方、棒の右端に加えた力によって軸 P の回りに逆向きのモーメントが働いており、このモーメントと前問で求めたモーメントとがつりあっている。

固定端から点 P までの距離を x とし、また、鉛直上向きに y 軸をとって、中立面の方程式を $y = y(x)$ と書けば、たわみが小さいとき、点 $P(x, y)$ における曲率半径は $-(d^2 y / d x^2)^{-1}$ と近似できる。

この場合、微分方程式

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{12 W (x - L)}{a b^3 E} \quad (3)$$

が成り立つことを示せ。ここに、 L は棒の長さ、 W は棒に加えた力の大きさである。

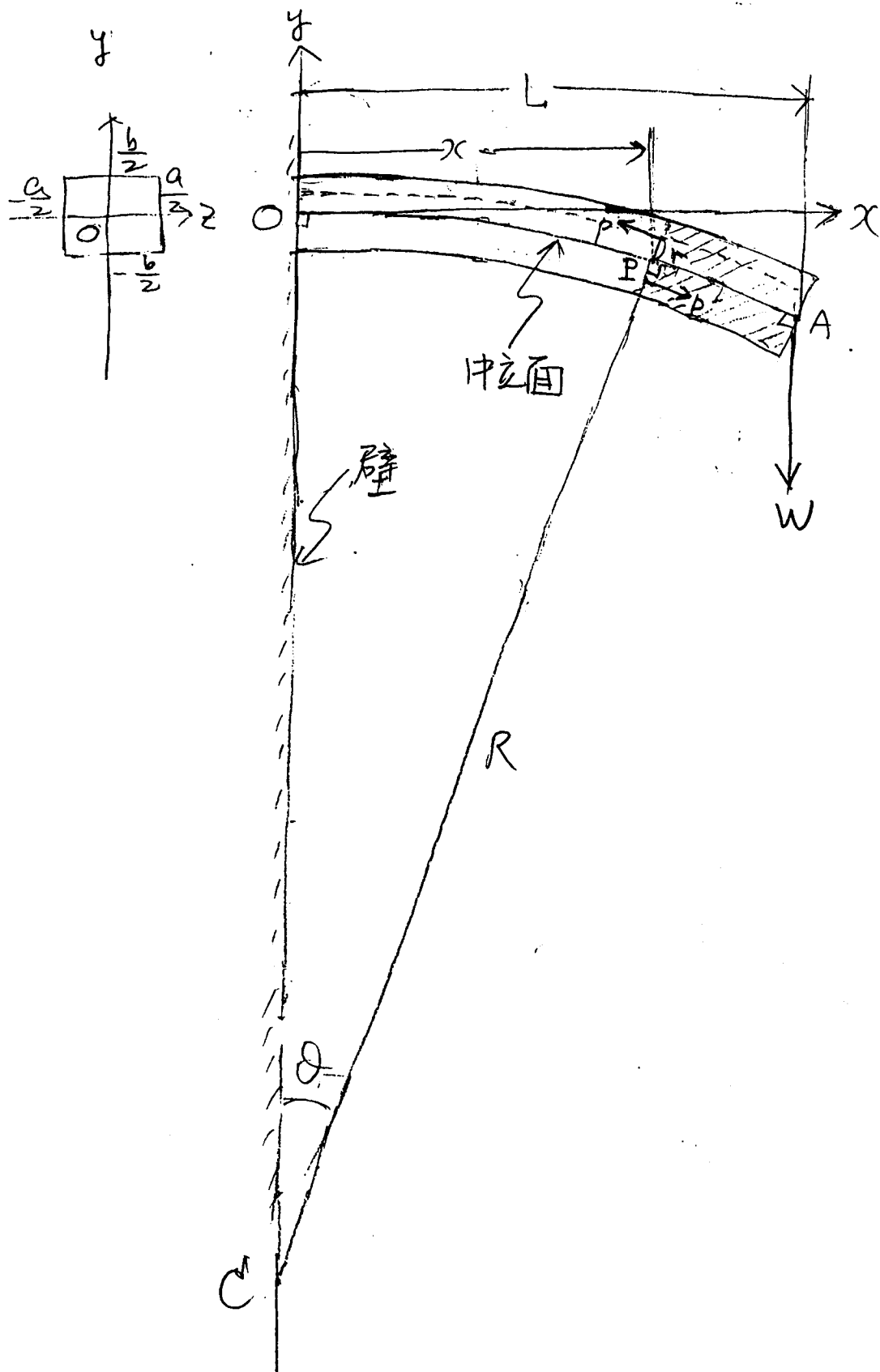
問 4. 力を加えられている棒の端は、固定されている端に較べて

$$\frac{4 W L^3}{a b^3 E}$$

だけ下がっていることを示せ。

壁面($x=0$)の図

xy 平面の図



III

スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル A を用いると、
電場 E と磁束密度 B は

$$E = -\text{grad } \phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1)$$

$$B = \text{rot } A \quad (2)$$

と表わすことができる。付加条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \text{div } A = 0 \quad (3)$$

を課すと、 ϕ と A は

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{j}{\epsilon_0 c^2} \quad (5)$$

を満す。ここで ρ と j は電荷密度と電流密度を表わす。
 c は光速、 ϵ_0 は真空の誘電率である。

電場 E と磁束密度 B は、マックスウエルの方程式

$$\text{div } E = \boxed{} \quad (6)$$

$$\text{rot } E = \boxed{} \quad (7)$$

$$\text{div } B = 0 \quad (8)$$

$$c^2 \text{rot } B = \boxed{} + \frac{\partial E}{\partial t} \quad (9)$$

に従う。

問1. 方程式 (1), (2), (3), (4), (5) を用いて, 方程式 (6), (7), (9) を完成せよ. ただしベクトル公式 $\text{rot rot } A = \text{grad}(\text{div } A) - \nabla^2 A$ を用いよ.

問2. 付加条件 (3) を 何ゲージ といいか. その名の由来 について簡単に述べよ.

問3. $\text{div } E$ と $\text{div } B$ が, 方程式 (6) と (8) のように, 異なる方程式に 従う理由 を述べよ.

問4. 電磁エネルギーの式

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2 + \epsilon_0 c^2 B^2}{2} \right) = E \cdot j + \text{div} (\epsilon_0 c^2 E \times B)$$

を導き, 右辺の二つの項の物理的意味を述べよ.

IV 内部構造のない粒子が中心対称ポテンシャル場 $V(r)$ 中に存在するとき、その分布状態を記述する波動関数 Ψ の空間部分は、動径関数 $R(r)$ と角度関数 $Y(\theta, \phi)$ に分離できる。ここで、 (r, θ, ϕ) は極座標である。動径関数 $R(r)$ の Schrödinger 方程式は、 $R(r)=u(r)/r$ とおくと

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dr^2} + \left\{ V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} u = Eu \quad (1)$$

となる。ここで m は粒子の質量、 E は粒子のエネルギー、 $\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数) である。

問1 (1) 式での l の意味を記せ。

問2 $V(r) \propto 1/r$ のとき、 $r \rightarrow 0$ での (1) 式の解を求め、原点付近での粒子の存在確率と l の関係を記せ。

問3 1組の (E, l) に対して、たかだか1つの動径関数 ($u=0$ を除く) が対応していることを示せ。

1997年度

京都大学大学院 理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問 問題

天文学

(200 点)

[時間 2 時間 30 分]

- 注意
1. 問題冊子は4頁である。
 2. 問題Ⅰ、Ⅱ、Ⅲのうちから、2問題を選択して解答せよ。
 3. 解答は問題毎に別紙に作成すること。
 4. 答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
 5. 問題用紙は持ち帰ること。

一様等方な宇宙を仮定すると、その時空の計量は

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (1)$$

で与えられる。ここに、 ds は線素、 r, θ, φ は共動座標系（宇宙膨張にのった座標系）を極座標で表したもので、無次元量である。 t は宇宙の各点で共通な時間、 c は光速を示す。 k は時空の構造によって、 $-1, 0, 1$ のいずれかの値をとる。 $R(t)$ はスケールファクターと呼ばれる、長さの次元を持つ量で、膨張宇宙では時間と共に変化し、その時間変化は、アインシュタイン方程式と、宇宙の平均密度と平均圧力との間の関係（状態方程式）によって与えられる。以下では、平均圧力はゼロとする。

問 1 座標 $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ に固定された天体 A から $t = t_1$ に放射された光を、座標 $(0, 0, 0)$ に固定された観測者 B が、 $t = t_0$ （これを現在とする）で受けたとする。この場合、(1) 式は、 $ds^2 = 0$ で、 $d\theta = d\varphi = 0$ として一般性を失わないので、

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \quad (2)$$

が成立する。さらに、 $t = t_1 + \delta t_1$ に A から放射された光が、 $t = t_0 + \delta t_0$ に B に到着したとすると、(2) 式より $\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R(t)}$ である。 $\delta t_1, \delta t_0$ の間の $R(t)$ の変化が無視できるとすれば、

$$\frac{\delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\delta t_1}{R(t_1)} \quad (3)$$

が成り立つことを示せ。

問 2 $t = t_1$ に A から放射された光の振動数が ν_1 （波長 λ_1 ）、B で $t = t_0$ に受けた時の振動数は ν_0 （波長 λ_0 ）だったとする。

$$\nu_0 = \nu_1 \frac{R(t_1)}{R(t_0)} \quad (4)$$

であることを (3) 式を利用して示せ。

ここで、観測量である赤方偏移 z を、

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0} \quad (5)$$

で定義すると (λ_1, ν_1 はそれぞれ静止系での波長、周波数)、(4) 式より

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} \quad (6)$$

である。

問 3 (2) 式を積分することによって、 $t = t_0$ における AB 間の距離 $D (= r_1 R(t_0))$ を、 z を用いて求めたい。 $k = 0$ の場合、

$$D = \frac{2c}{H_0} \left[1 - (1 + z)^{-1/2} \right] \quad (7)$$

となることを示せ。但し、光速 c と $H_0(t = t_0)$ における $\frac{dR}{dt}/R$ は既知とする。

ヒント： $x = \frac{R(t)}{R(t_0)}$ とおくとよい。またこの場合、アインシュタイン方程式より、 $(\frac{dR}{dt})^2 R = \text{一定}$ 、である。

問 4 A は光度 L (erg s^{-1}) で光を放射しているとする。 $t = t_1$ に発せられた光は $t = t_0$ には $4\pi D^2$ の面に到達するが、B で単位時間、単位面積あたりに受けるエネルギー (f) は、

$$f = \frac{L}{4\pi D^2(1+z)^2} \quad (8)$$

となることを (3) 式、(4) 式に注意して示せ。

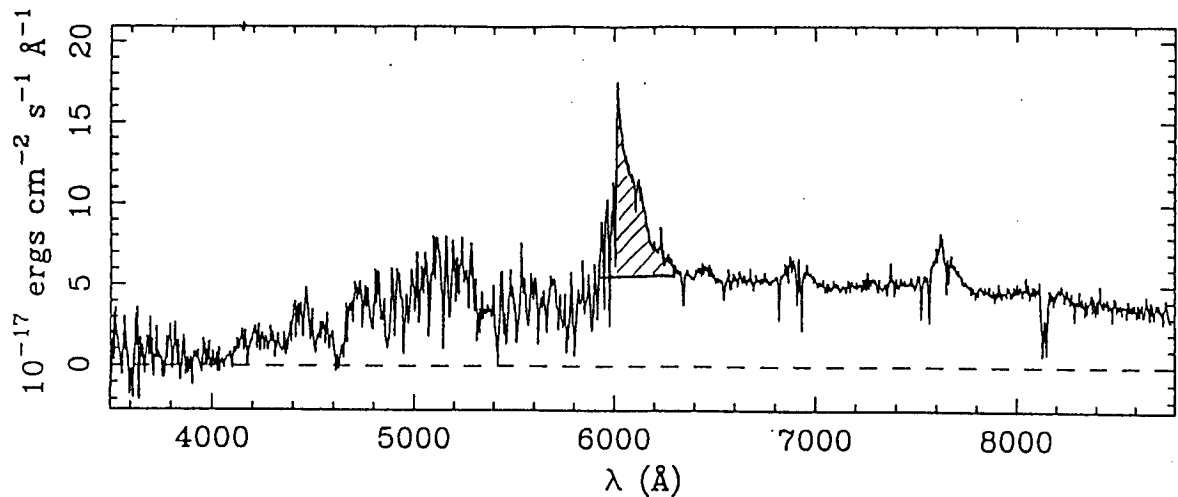
天体 A のスペクトルとして下図を得た。図の横軸は観測波長、縦軸は観測された単位時間、単位面積、単位波長当たりのエネルギーである。波長 6000\AA のところに見られる輝線はライマン α 線で、静止系での波長は約 1200\AA である。

問 5 以下の問では有効数字 1 桁で答えてよい。

(1) この天体の赤方偏移 z を求めよ。

(2) このライマン α 輝線の単位時間、単位面積当たりのエネルギー (f) は、図中斜線部の面積に相当する。 f を求めよ。

(3) $k = 0$ の場合について、このライマン α 輝線の光度を求めよ。但し、 $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ 、 $1 \text{ Mpc} = 3 \times 10^{24} \text{ cm}$ であり、 $H_0 = 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ とする。



II

一様な媒質 (密度 ρ_1) において超新星爆発が起こり、莫大なエネルギー (E) が、狭い領域において急激に解放されたとする。すると図1に示したように、超新星爆発により発生した衝撃波は、まわりのガスをはき集めながら球対称に広がり、はき集められたガスは衝撃波により加熱され、ホットバブルを形成する。このような場合、爆発の中心から衝撃波の位置までの距離 (r_{sh}) は爆発からの経過時間 (t) のべき関数で与えられることが知られており、そのべきは次元解析の手法を用いて簡単に求めることができる。

問1 長さ、時間、質量の次元をそれぞれ、 L 、 T 、 M とすると、密度、エネルギーの次元はそれぞれどう表されるか。

問2 与えられた物理量、 ρ_1 と E を組み合わせて、無次元量をつくる。すなわち

$$\xi \equiv r t^l \rho_1^m E^n \quad (1)$$

とおき、 ξ が無次元量に (L 、 T 、 M によらず) なるように l 、 m 、 n を決めよ。ここで r は爆発の中心からの距離である。衝撃波のたつ位置 (r_{sh}) は $t^{2/5}$ に比例して増加すること、およびその広がる速度 (U_{sh}) は $t^{-3/5}$ に比例して減少することを示せ。なお衝撃波は、(1)式において $\xi = 1$ とおいた位置にたつとする。

問3 今、 $E = 10^{51.0}$ erg、 $\rho_1 = 10^{-24.0}$ g cm $^{-3}$ としたとき、 10^n 年後の衝撃波の位置 (r_{sh} ; pc) を、 n の関数として求めよ (n は実数)。なお1年= $10^{7.5}$ 秒、1pc= $10^{18.5}$ cmとする。

問4 上記の評価が使えるのは、衝撃波がはき集めたガスの量が超新星爆発に伴って放出されたガスの量を越えてから、広がった高温ガスが放射により冷えてしまうまでである。爆発によって放出されたガスの質量が $10^{33.0}$ g、放射冷却の効率が単位体積あたり毎秒 $\Lambda = 10^{-21.0}$ erg のとき、上記の評価が有効なのは、いつからいつまでか。なおホットバブルの中は一様とする。また簡単のため、 Λ は時間によらず一定とし、 $\log_{10}(4\pi/3) \simeq 0.6$ と近似することにする。

問5 超新星爆発が連続して起きており、単位時間あたりのエネルギー発生量が一定とみなせる場合、ホットバブルの半径は時間の何乗に比例して大きくなるか。

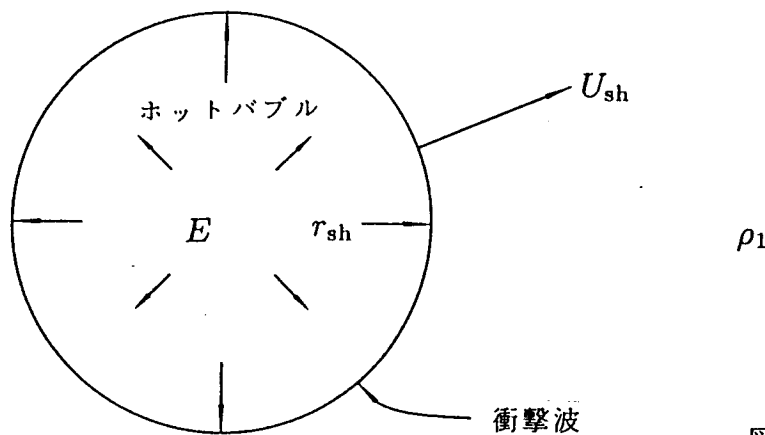


図1

III

問1 質量 M , 半径 a の星の外側に水素原子だけからなる大気が, 星の半径に比べて十分大きな空間をみたしている. 温度 T は星の中心からの距離 r の関数であり, 大気は静力学平衡をたもっている. $T(r) = T(a)(a/r)^\alpha$ としたとき, 無限遠において $P = 0$ となるために α のとりうる範囲を定めよ. ただし P は大気の圧力であり, 水素原子の電離は考えないものとする.

問2 この大気内の温度分布 $T(r)$ は r の増加する方向に熱伝導による定常的な熱エネルギー流によって定めるとしよう. 熱伝導率 K が

$$K = \kappa_0 T^{5/2} \quad (\kappa_0 \text{ は定数})$$

によって与えられるとき, 大気内の温度分布 $T(r)$ を求めよ. また星の中心を中心とする球面を通過する単位時間当りの熱エネルギー流量を求めよ. この場合星の表面 ($r = a$) において温度は常に一定にたもたれており, また無限遠においては $T = 0$ と仮定せよ.

問3 圧力 P が無限遠において有限値を示すときには, 大気は静力学平衡をたもつことができず, r の増加する方向に定常的なガス流が生じる. このガス流は球対称であると考えて, ガス流の速度 $v(r)$, 水素原子数密度 $n(r)$ を記述する方程式をみちびけ.

1997年度

京都大学大学院 理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻
宇宙物理学・天文学分野
修士課程

筆答試問 問題

英語

(100 点)

[時間 1 時間 30 分]

- 注意
1. 問題は2頁、1問題である。
 2. 解答は別紙に作成すること。
 3. 答案用紙一枚毎に受験番号と氏名を記入すること。
 4. 問題用紙は持ち帰ること。

次の文章は、Nature 誌(1992年)に掲載された日本の大学についての記事である。これを読み、問1～問3に答えよ。

The most shocking feature (to outsiders) of Japan's system of national universities is the functional separation between academics and their administrator counterparts. Academics appoint their like to permanent positions, and every so often (four years is the standard interval) elect a president, but none of them has the power to appoint an administrator to office.

The senior administrators at the national universities are Monbusho officials seconded for a tour of duty at the coal-face, as it were. One university president claims to be able to veto those thus sent from Tokyo to manage his affairs, but gave no indication of whether he had ever exercised this right. Another said openly that the lack of authority on administration was the most galling feature of his work.

There is also the fashionable problem of the 'graduate school'. Many senior academics, with an eye on the research universities of the United States, believe that the national universities need a mechanism for training students in research, without the encumbrance of responsibility for undergraduate teaching.

The University of Tokyo's academic lawyers have devised a neat variant of this case by arranging to have themselves renamed teachers in the Graduate School of Law, whereupon the university has argued that they must also carry out extra duties in the undergraduate faculty; their annual *koza* allowances have already been increased by 25 per cent; those in the science and engineering faculties will increase by the same proportion within the year.

Monbusho, while as vigilant as ever in the counting of the last yen, has been indulgent of this pressure from academics for structural change. Within reason (and the law) it seems now to be saying that universities are free to organize themselves as they choose.

So are the national universities now free? In no sense that would be so understood elsewhere. One university president says that his university's autonomy amounts to the freedom to make academic appointments (subject to the formal approval of Monbusho, never withheld), to change the teaching pattern (subject to the less formal willingness of the academic staff) and individuals' right to pursue what research projects they choose. That some, perhaps many, pursue no research at all is an open secret.

To be fair, there are few in Japan, even among academics, who understand the concept of a self-governing public university, a community of scholars with responsibility both for the education of the young and the management of their own affairs which is supported partly by the government on account of the public service it renders. So familiar is Monbusho's influence that some evidently believe it to be unavoidable and permanent.

There are also tactical reasons why academics at the national universities do not talk much about self-government. "There's nothing Monbusho would like better than to turn us into private universities", said one. "They're much cheaper for the government." But this response is beside the point. There is no reason why a self-governing university should not be supported from public funds on much the same scale as now.

The benefits would seem self-evident elsewhere; self-determination would give academics self-respect, would in principle allow a degree of flexibility in academic planning unobtainable in the present rigid system, would also encourage that self-determination in principle allows and would encourage benefactors from industry and commerce to make donations untied to specific purposes (but for build-

ings, for example). Given the cosmopolitanism rife at the world's great universities, from Harvard to Heidelberg, it is impossible to see any Japanese university joining that company unless it enjoys a sense of freedom now denied.

Of course, there are also hazards in self-government. A university may make bad judgements, and suffer financially or academically. It may postpone decisions, with similar results. And the receipt of public money entails that the recipients should be accountable — as things are, in Japan, to Monbusho's officials, in a self-governing university, to academic colleagues (which may be an even more painful process). Some are alarmed at the magnitude of these risks. Fortunately, there are some prepared to face them in the hope that some handfuls of excellent researchers will not forever be condemned to work in institutions of studied and contrived mediocrity.

- 問 1 文章全体の要旨を、日本語で 250 字程度にまとめよ。
- 問 2 四角で囲んだ部分を和訳せよ。
- 問 3 この文章の最後の 2 段落に関する意見あるいは感想を 50 語程度の英文で記せ。