輻射過程

岩室 史英 (宇宙物理教室 517 号室, 753-3891)
iwamuro@kusastro.kyoto–u.ac.jp

1　光について

名称	波長	大気の透過度
γ 線	<0.1Å	×
硬 X 線	0.1Å∼6Å	×
軟 X 線	6Å∼100Å	×
紫外線	100Å∼3000Å	×
可視光	3000Å∼1μm	◎
近赤外	1μm∼5μm	○
中間赤外	5μm∼20μm	△
遠赤外	20μm∼300μm	×
サブミリ波	300μm∼1mm	△
ミリ波	1mm∼1cm	○
マイクロ波	1cm∼10cm	◎
電波	>10cm	◎

- 波長 λ (cm)・振動数 ν (Hz)

$$\lambda = c/\nu \tag{1}$$

- エネルギー E (erg, ergs)・温度 T (K)

$$E = h\nu = kT \tag{2}$$

- 定数など

光速	$c = 2.99792458$ e+10 cm sec^{-1}
Planck 定数	$h = 6.62606876$ e−27 erg sec
Boltzmann 定数	$k = 1.3806503$ e−16 erg K^{-1}
電子ボルト	1eV = 1.602176462 e−12 erg

水素原子のイオン化エネルギー 13.6eV に相当する光の波長は？

2　輻射場

- Surface brightness I_ν (erg $\mathrm{sec}^{-1}\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{Hz}^{-1}\mathrm{Sr}^{-1}$)

$$\text{総エネルギー} = \int\int\int\int I_\nu \; d\nu dA dt d\Omega \qquad (3)$$

- エネルギー保存則

$$dE = I_\nu \; d\nu dA dt d\Omega = I'_\nu \; d\nu' dA' dt' d\Omega' \qquad (4)$$

$$dA d\Omega = dA' d\Omega' = \frac{dA dA'}{r^2} \qquad (5)$$

$$d\nu = d\nu' \;\Rightarrow\; I_\nu = I'_\nu \qquad (6)$$

- Flux density F_ν (erg $\mathrm{sec}^{-1}\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{Hz}^{-1}$, Jy)

$$F_\nu = \int I_\nu \cos\theta \; d\Omega \qquad (7)$$

1 Jy = 1 e−23 erg $\mathrm{sec}^{-1}\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{Hz}^{-1}$

- Momentum flux density Π_ν (dyn cm^{-2}Hz^{-1})

$$\Pi_\nu = \frac{1}{c}\int I_\nu \cos^2\theta \; d\Omega \tag{8}$$

- Total flux F (erg sec^{-1}cm^{-2})

$$F = \int_{\nu_1}^{\nu_2} F_\nu \; d\nu \tag{9}$$

- Pressure p (dyn cm^{-2})

$$p = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \Pi_\nu \; d\nu \tag{10}$$

- Intensity I (erg sec^{-1}cm^{-2}Sr^{-1})

$$I = \int_{\nu_1}^{\nu_2} I_\nu \; d\nu \tag{11}$$

- Emissivity j_ν (erg sec^{-1}cm^{-3}Hz^{-1}Sr^{-1})

$$j_\nu = \frac{dI_\nu}{ds} \tag{12}$$

- Absorption coefficient α_ν (cm^{-1})

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu \tag{13}$$

3 輻射輸送

- 基礎方程式

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \tag{14}$$

- 放射のみの場合

$$I_\nu(s) = I_\nu(0) + \int_0^s j_\nu(s')\ ds' \tag{15}$$

$$I_\nu(0) = 0,\ j_\nu = const.\ \Rightarrow\ I_\nu(s) = j_\nu s \tag{16}$$

- 吸収のみの場合

$$I_\nu(s) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} \tag{17}$$

Optical depth τ_ν

$$\tau_\nu \equiv \int_0^s \alpha_\nu(s')\ ds' \tag{18}$$

- 放射・吸収両方ある場合

$$d\tau_\nu = \alpha_\nu ds \tag{19}$$

Source function S_ν

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \tag{20}$$

(19)(20) で (14) を変形

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu = S_\nu \tag{21}$$

両辺に e^{τ_ν} をかけて積分

$$I_\nu = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu)\ d\tau'_\nu \tag{22}$$

$$S_\nu = const.\ \Rightarrow\ I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu + e^{-\tau_\nu}[I_\nu(0) - S_\nu] \tag{23}$$

$\tau_\nu\ \rightarrow\ \infty$ の場合 $I_\nu\ \rightarrow\ S_\nu$ となる。

- 光学的に薄い天体からの放射

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2},\ dV = dAds \tag{24}$$

(7) で $\cos\theta \approx 1$ として (12)(24) と合わせると

$$F_\nu = \frac{1}{r^2}\int j_\nu\ dV \tag{25}$$

- Luminosity L_ν (erg sec^{-1}Hz^{-1})
等方的な放射の場合、単位体積あたりの輻射量を $P_{\nu V}$ とすると

$$j_\nu = \frac{1}{4\pi}P_{\nu V} \tag{26}$$

(25)(26) を合わせて

$$L_\nu = \int P_{\nu V}\ dV = 4\pi r^2 F_\nu \tag{27}$$

- Total luminosity $L_{\rm tot}$ (erg sec^{-1})

$$L_{\rm tot} = 4\pi r^2 \int_0^\infty F_\nu\ d\nu \tag{28}$$

典型的な遠方電波源(赤方偏移 0.1, 1Jy @1.4GHz, $F_\nu \propto \nu^{-0.7}$, 10GHz cutoff) の Total Luminosity は ?
(赤方偏移 0.1 $\approx$ 距離 430Mpc, 1pc=3.09e+18 cm)

4　黒体輻射

黒体放射のメカニズムに関しては、熱力学、統計力学、量子力学などの知識を必要とするため、導出の過程は省略して結果のみ扱う。

- Plank law B_ν (erg sec^{-1}cm^{-2}Hz^{-1}Sr^{-1})

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1} \tag{29}$$

単位から分かるように、この式により温度 T の黒体の面輝度 ((3) に相当) が与えられる。
(1) と (1) から得られる $|d\nu| = c/\lambda^2|d\lambda|$ の関係を用いて単位波長あたりの式に変換すると、

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/\lambda kT)-1} \tag{30}$$

- 半径 R の球状の黒体 (星) からの放射
$I_\nu = B_\nu$ として (7) に代入

$$\begin{aligned} F_\nu &= B_\nu \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_c} \sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= \pi B_\nu \sin^2\theta_c \\ &= \pi B_\nu \left(\frac{R}{r}\right)^2 \end{aligned} \tag{31}$$

特に黒体表面では $r = R$ として

$$F_\nu = \pi B_\nu \tag{32}$$

- Stefan-Boltzmann law

  (9)(32) より得られる total flux

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\infty \pi B_\nu \, d\nu \\ &= \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \\ &= \sigma T^4 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\left(\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}\right)$$

  Stefan-Boltzmann 定数

$$\sigma \equiv \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} \tag{34}$$

$$= 5.670400\ \mathrm{e}{-5}\ \mathrm{erg\,sec^{-1}cm^{-2}K^{-4}}$$

- Rayleigh-Jeans law ($h\nu \ll kT$)

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 = \frac{h\nu}{kT} + ... \tag{35}$$

$$I_\nu^{RJ}(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT \tag{36}$$

- Wien law ($h\nu \gg kT$)

$$I_\nu^{W}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \tag{37}$$

- Wien の変位則

  B_ν 最大となるときの ν を ν_{max} とすると、

  $$\left.\frac{\partial B_\nu}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_{max}} = 0 \tag{38}$$

  $x = h\nu_{max}/kT$ とし、$x = 3(1-e^{-x})$ の解は $x \approx 2.82$ である事を用いると、

  $$\frac{\nu_{max}}{T} = 5.878 \text{ e+10 Hz K}^{-1} \tag{39}$$

  ($\lambda_{max}T = 5100\ \mu\text{m K}$ に相当)

  B_λ 最大となるときの λ を λ_{max} とすると、

  $$\left.\frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_{max}} = 0 \tag{40}$$

  $y = hc/\lambda_{max}kT$ とし、$y = 5(1-e^{-y})$ の解は $y \approx 4.97$ である事を用いると、

  $$\lambda_{max}T = 2898\ \mu\text{m K} \tag{41}$$

- 熱放射と黒体輻射

  熱放射は $S_\nu = B_\nu$ として与えられる。(23) より、光学的に厚い場合には $I_\nu \to B_\nu$ となり、熱放射は黒体輻射と一致する。

- 天体の「温度」

  天体からの放射は黒体輻射とは一致しないが、以下のような方法で天体の温度が観測的に定義されている。

Brightness Temperature T_b (K)
特定の波長域で天体の面輝度と同じ黒体の温度

$$I_\nu = B_\nu(T_b) \tag{42}$$

(31) で観測値から B_ν を求める事ができる。
特に Rayleigh-Jeans law の成り立つ電波領域では面輝度は直接 T_b を表し、(23) より

$$T_b = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu = T(1 - e^{-\tau_\nu}) \tag{43}$$

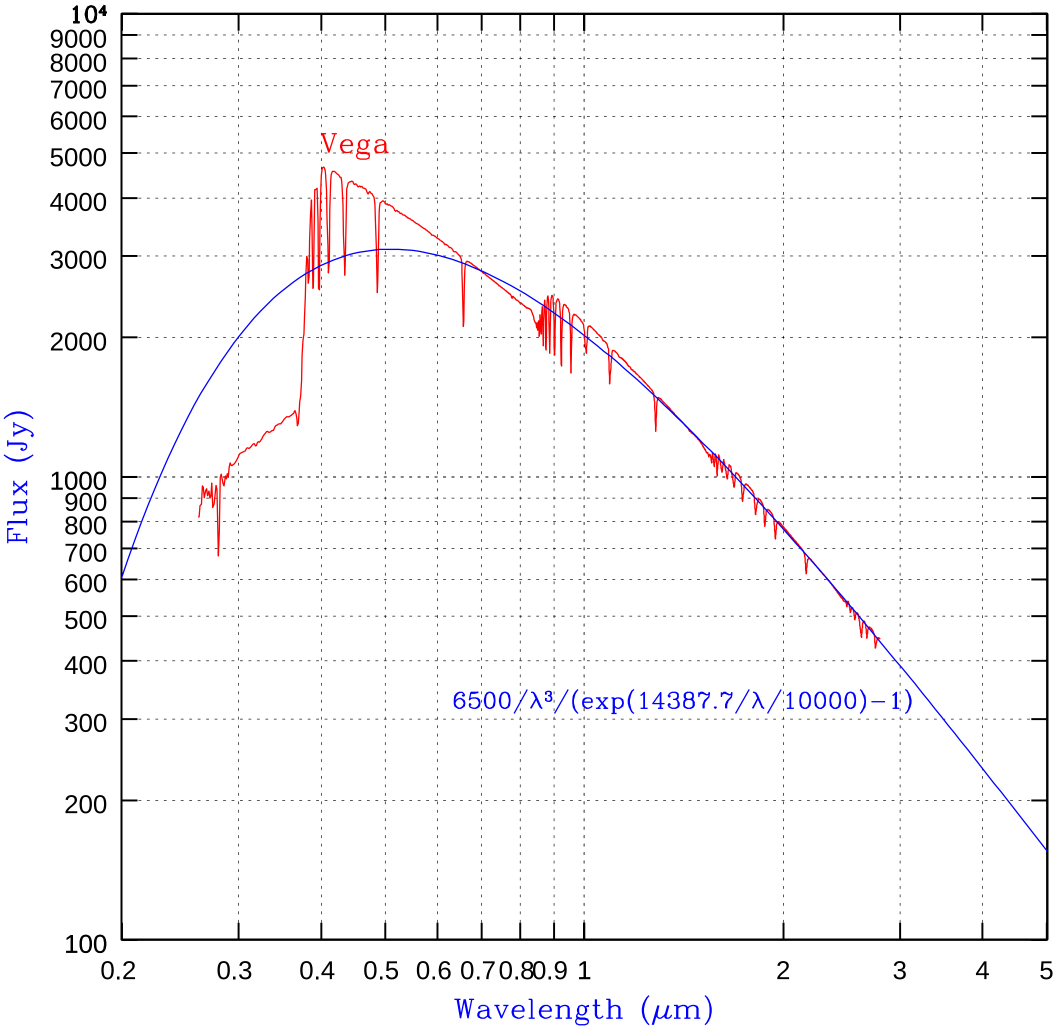
となる。天体が光学的に厚い場合には、T_b は天体の熱放射の温度と一致する。

Color Temperature T_c (K)
分光あるいは多色測光で求められた天体のスペクトル形状に最も近い黒体の温度。この温度は天体の絶対的な明るさを必要としないため、光学的厚みに関係なく求める事ができる。

Effective Temperature T_{eff} (K)
T_b を全波長域に拡張したもので、天体の Total flux (9) から Stefan-Boltzmann law (33) を用いて求められる温度。

$$F = \int\int I_\nu \mathrm{cos}\theta \; d\Omega d\nu = \sigma T_{eff}^4 \tag{44}$$

Vega は近赤外線で $T_c \approx$ 1e+4 K である。Vega の見かけの直径は何 arcsec で、半径は太陽の何倍か？ (Vega までの距離 25.103 光年、1 年 $=$ 365.2422 日、太陽半径 6.960 e+10 cm、1arcsec $= 1/3600$ 度、図は横軸が波長、縦軸が F_ν である事と、図中の式の λ の単位は μm である事に注意)



5　放射・吸収

- Einstein 係数

  Mean intensity

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi}\int I_\nu \ d\Omega \tag{45}$$

  Line profile function

$$\int_0^\infty \phi(\nu)\ d\nu = 1 \tag{46}$$

  とすると、$E \Leftrightarrow E + h\nu_0$ 遷移に関与する intensity は

$$\overline{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu)\ d\nu \tag{47}$$

  Einstein A 係数 A_{21} (sec^{-1})
  準位 2 から 1 への自発的な遷移確率 (Spontaneous emission)

  Einstein B 係数 B_{12}, B_{21}
  $B_{12}\overline{J}$ は準位 1 から 2 への遷移確率 (Absorption)
  $B_{21}\overline{J}$ は準位 2 から 1 への遷移確率 (Stimulated emission)

- Einstein 係数間の関係

  熱力学平衡状態にあるガスの、準位 1,2 にある原子

の個数密度を n_1, n_2 とすると、

$$n_1 B_{12}\overline{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21}\overline{J} \tag{48}$$

$$\overline{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1} \tag{49}$$

また、熱力学平衡状態では n_1/n_2 は以下のように与えられる

$$\begin{aligned}\frac{n_1}{n_2} &= \frac{g_1 \mathrm{exp}(-E/kT)}{g_2 \mathrm{exp}[-(E+h\nu_0)/kT]} \\ &= \frac{g_1}{g_2}\mathrm{exp}\left(\frac{h\nu_0}{kT}\right) \end{aligned} \tag{50}$$

g_1, g_2 はそれぞれの準位の状態総数で、統計的重みとしてはたらく。例えば水素原子の場合、

$$g_n = 2\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = 2n^2 \tag{51}$$

(49)(50) より、

$$\overline{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21})\mathrm{exp}(h\nu_0/kT) - 1} \tag{52}$$

Line profile function $\phi(\nu)$ は ν_0 付近で鋭いピークを持つため、(52) は ν_0 での黒体輻射と一致する。(29) と比較することにより、

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \tag{53}$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu_0^3}{c^2} B_{21} \tag{54}$$

どれか 1 つの係数がわかれば残りがわかる。

- 放射・吸収との関係

$$j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu) \tag{55}$$

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \phi(\nu) \tag{56}$$

(20) に代入

$$S_\nu = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}} \tag{57}$$

(56)(57) を (53)(54) を用いて書き換えると、

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} \left(1 - \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1}\right) \phi(\nu) \tag{58}$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu_0^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1\right)^{-1} \tag{59}$$

- 熱放射

熱力学平衡状態にあるガスの場合、(50) が成り立つので (58)(59) に代入

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} \left[1 - \exp\left(\frac{-h\nu_0}{kT}\right)\right] \phi(\nu) \tag{60}$$

$$S_\nu = B_{\nu_0}(T) \tag{61}$$

- 非熱放射

(50) が成り立たない場合の放射全てを指す

$$\frac{n_1}{n_2} \neq \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu_0}{kT}\right) \tag{62}$$

(プラズマ等、粒子の速度が Maxwell 分布に従わないときや、散乱の効果を考慮する必要がある場合に相当)

- メーザー

  熱力学平衡状態では (50) より、

$$\frac{n_2 g_1}{n_1 g_2} = \exp\left(\frac{-h\nu_0}{kT}\right) < 1 \tag{63}$$

  熱力学平衡で無い場合にもほとんどの場合において

$$\frac{n_1}{g_1} > \frac{n_2}{g_2} \tag{64}$$

  が成り立つが、何らかの理由で

$$\frac{n_1}{g_1} < \frac{n_2}{g_2} \tag{65}$$

  となるとき、(58) は負の値となる。このような場合、輝線は増幅されて非常に強く放射される。

6　散乱

- Scattering coefficient σ_ν (cm^{-1})

  光がエネルギーを変えずに等方散乱される場合

  (coherent/elastic/monochromatic scattering)

  mean intensity (45) を用いて

$$j_\nu = \sigma_\nu J_\nu \tag{66}$$

散乱のみを考える場合、(14) は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\sigma_\nu (I_\nu - J_\nu) \tag{67}$$

(これから一般的な解を出すことはできない。)

- 熱放射 + 吸収 + 散乱

  熱放射では $j_\nu = \alpha_\nu S_\nu = \alpha_\nu B_\nu$ で、これと (14)(67) を全て合わせると

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu (I_\nu - B_\nu) - \sigma_\nu (I_\nu - J_\nu) \tag{68}$$

$$= -(\alpha_\nu + \sigma_\nu)(I_\nu - S_\nu) \tag{69}$$

$$S_\nu = \frac{\alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \tag{70}$$

- Extinction coefficient $\alpha_\nu + \sigma_\nu$ (cm^{-1})

  吸収 + 散乱の場合、(19) は

$$d\tau_\nu = (\alpha_\nu + \sigma_\nu) ds \tag{71}$$

減光 = 吸収 + 散乱 となる。

- Mean free path l_ν (cm)

$$\tau_\nu = (\alpha_\nu + \sigma_\nu) l_\nu = 1 \tag{72}$$

$$l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \tag{73}$$

- Albedo $1-\epsilon_\nu$
  一回の減光過程での吸収確率を ϵ_ν とすると、

$$\epsilon_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \tag{74}$$

$$1 - \epsilon_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \tag{75}$$

  後者を single-scattering albedo という。(70) は

$$S_\nu = (1-\epsilon_\nu)J_\nu + \epsilon_\nu B_\nu \tag{76}$$

- Diffusion length l_* (cm)
  N 回の散乱で到達できる距離は Mean free path l_ν の $\sqrt{N}$ 倍になる。また、吸収確率 ϵ_ν の逆数は、吸収されるまでの散乱回数を表す。これから、吸収されるまでに到達できる距離は、

$$l_* = \sqrt{N} l_\nu = \frac{l_\nu}{\sqrt{\epsilon_\nu}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_\nu(\alpha_\nu + \sigma_\nu)}} \tag{77}$$

  diffusion/thermalization length または effective mean path と呼ばれる。
- Rosseland 近似

$$ds = \frac{dz}{\cos\theta} = \frac{dz}{\mu} \tag{78}$$

  (78) で (69) を変形

$$I_\nu(z,\mu) = S_\nu - \frac{\mu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu}\frac{\partial I_\nu}{\partial z} \tag{79}$$

上式第 2 項は、mean free path 程度の距離での I_ν の変化を表しており、これは普通 I_ν 全体に対して小さいため、第 0 近似では第 2 項は無視できる。その場合、(70) と合わせて

$$I_\nu^{(0)} = S_\nu^{(0)} = B_\nu \tag{80}$$

これを (79) 右辺に代入し、第一近似を得る。

$$I_\nu^{(1)}(z,\mu) = B_\nu - \frac{\mu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial z} \tag{81}$$

(7) に代入

$$\begin{aligned} F_\nu(z) &= \int I_\nu^{(1)}(z,\mu)\mathrm{cos}\theta\ d\Omega \\ &= 2\pi\int_{-1}^{+1} I_\nu^{(1)}(z,\mu)\mu\ d\mu \\ &= -\frac{2\pi}{\alpha_\nu + \sigma_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\int_{-1}^{+1}\mu^2\ d\mu \\ &= -\frac{4\pi}{3(\alpha_\nu + \sigma_\nu)}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \tag{82}$$

Total flux(9) は、

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^\infty F_\nu(z)\ d\nu \\ &= -\frac{4\pi}{3}\frac{\partial T}{\partial z}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha_\nu + \sigma_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\ d\nu \\ &= -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha_R}\frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \tag{83}$$

Rosseland mean absorption coefficient

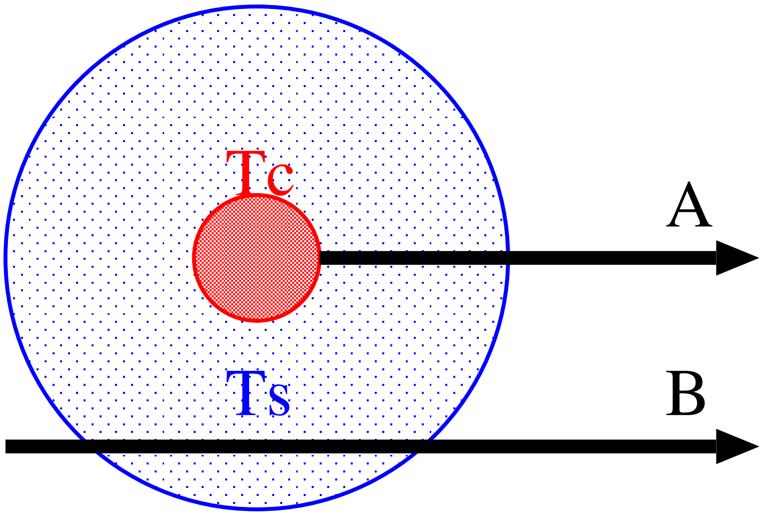
$$\frac{1}{\alpha_R} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\alpha_\nu+\sigma_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\, d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T}\, d\nu} \tag{84}$$

上式の分母は (33) より

$$\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T}\, d\nu = \frac{\partial}{\partial T}\int_0^\infty B_\nu\, d\nu = \frac{4\sigma T^3}{\pi} \tag{85}$$

(83) は Rosseland approximation または equation of radiative diffusion と呼ばれ、星の内部構造の計算に用いられる。

温度 T_C の光学的に厚い中心核 (core) と、それを囲む温度 T_S の光学的に薄い外殻 (shell) を考える。外殻には振動数 ν_0 に α_ν の大きい遷移があるとすると、視線 A, B に沿ってどのようなスペクトルが観測されるか。$T_C > T_S$, $T_C < T_S$ それぞれの場合について考えなさい。



7　調和振動子

- 双極子放射のエネルギー放射率 P, $\langle P\rangle$ (erg sec^{-1})

$$P = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{r}}^2 \tag{86}$$

$$\langle P\rangle = \frac{e^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{87}$$

単位電荷　$e = 1.602176462$ e-19 C

真空の誘電率　$\varepsilon_0 = 8.854187817$ e-21 g^{-1}cm^{-3}sec^{2}C^2

電子の質量　$m = 9.10938188$ e-28 g

- Radiation reaction force $\mathbf{F}_{\rm rad}$ (dyn)

$$-\mathbf{F}_{\rm rad}\cdot\dot{\mathbf{r}} = P \tag{88}$$

振動の 1 周期に相当する時間 $t_1 \sim t_2$ で積分

$$\begin{aligned} -\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}_{\rm rad}\cdot\dot{\mathbf{r}}\;dt &= \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2}\ddot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}\;dt \\ &= \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left([\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\dddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}\;dt\right) \end{aligned} \tag{89}$$

右辺第一項は $\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}(t_1) = \ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}(t_2)$ なので消える

$$\mathbf{F}_{\rm rad} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dddot{\mathbf{r}} = m\tau\dddot{\mathbf{r}} \tag{90}$$

- Radiation reaction time scale τ (sec)

$$\tau \equiv \frac{2r_0}{3c} = 6.2664247 \text{ e}{-24} \text{ sec} \tag{91}$$

- 古典的電子半径 r_0 (cm)

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = 2.817940285 \text{ e}-13 \text{ cm} \tag{92}$$

- Radiation reaction を含んだ運動方程式

$$\mathbf{F} = m(\ddot{\mathbf{r}} - \tau\dddot{\mathbf{r}}) = -m\omega_0^2\mathbf{r} + e\mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \tag{93}$$

振動の方向を x とすると

$$-\tau\dddot{x} + \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m}e^{i\omega t} \tag{94}$$

$$x = x_0 e^{i\omega t} = |x_0|e^{i(\omega t+\delta)} \tag{95}$$

$$x_0 = -\frac{eE_0}{m}\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega^3\tau} \tag{96}$$

$$\tan\delta = \frac{\omega^3\tau}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{97}$$

エネルギー放射率の平均は (87) より

$$\begin{aligned}\langle P\rangle &= \frac{e^2|x_0|^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \\ &\approx \frac{e^4E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2c^3}\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (\omega_0^3\tau)^2}\end{aligned} \tag{98}$$

(上式右辺分母第二項は、$\tau\omega \ll 1$ では $\omega \approx \omega_0$ 付近でしか影響がないので、$\omega \to \omega_0$ とした)

- 入射光の平均 flux (Poynting vector **S** の時間平均) $\langle S\rangle$ (erg sec^{-1} cm^{-2})

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 cE_0^2 \tag{99}$$

- Scattering cross section σ (cm^2)

$$\sigma \equiv \frac{\langle P \rangle}{\langle S \rangle} = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega_0^3 \tau)^2} \tag{100}$$

- Thomson cross section σ_T (cm^2)

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 6.6524585 \text{ e}{-25} \text{ cm}^2 \tag{101}$$

- Thomson scattering
  X 線などの波長の短い光子に対しては $\omega \gg \omega_0$ となるので、(100) は

$$\sigma \to \sigma_T \tag{102}$$

- Rayleigh scattering
  電波や赤外線など波長の長い光子に対しては $\omega \ll \omega_0$ となるので、(100) は

$$\sigma \to \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \tag{103}$$

- 吸収
  $\omega \approx \omega_0$ の場合、$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\omega_0(\omega - \omega_0)$ で、それ以外の部分で $\omega = \omega_0$ とおくと (100) は

$$\sigma \approx \pi c r_0 \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \tag{104}$$

- Classical damping constant Γ (rad^2 sec^{-1})

$$\Gamma \equiv \omega_0^2 \tau \tag{105}$$

- Oscillator strength f_{ij}

  (104) は $\omega \approx \omega_0$ でしか成立しないが、(100) を全振動数で積分する際には最も大きな寄与を与えるので、とりあえず (104) を積分する。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sigma\ d\nu &\approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \sigma\ d\omega \\ &= \pi c r_0 = \frac{e^2}{4\varepsilon_0 mc}\end{aligned} \tag{106}$$

  量子力学的に解いたものとの比を f_{ij} で表し、

$$\int_0^\infty \sigma\ d\nu = \frac{e^2}{4\varepsilon_0 mc} f_{ij} = \frac{h\nu_0}{4\pi} B_{ij} \tag{107}$$

  右辺は (56) 右辺第一項の電子 1 個あたりの全振動数積分に相当する。

- 屈折率 n_r

$$n_r = \frac{c}{c'} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{\mu}{\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \tag{108}$$

  強磁性体以外では $\mu_r \approx 1$ なので、気体 $(n_r \sim 1)$ では n を個数密度として、

$$n_r = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 + \frac{nex}{\varepsilon_0 E}} \approx 1 + \frac{nex}{2\varepsilon_0 E} \tag{109}$$

  (96)(105) より

$$n_r = 1 + \frac{ne^2}{2\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega)} \tag{110}$$

自由電子に対する運動方程式

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E_0}\mathrm{sin}\omega t \tag{111}$$

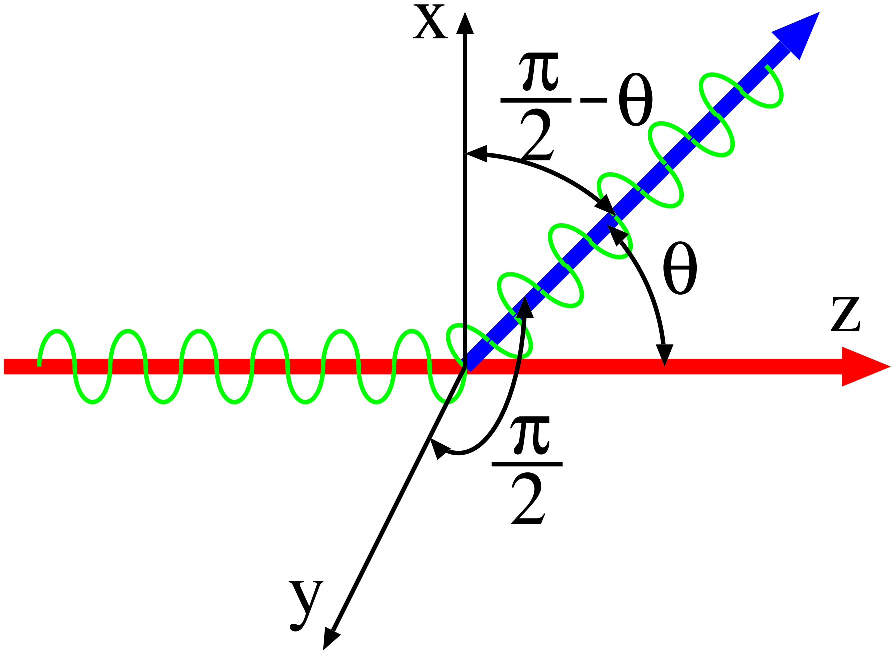
から、(101) を示しなさい。また、双極子放射の角度依存性 (Θ は $\mathbf{r}$ と双極子放射の方向との間の角)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\mathrm{sin}^2\Theta \tag{112}$$

から Thomson scattering の角度依存性 (θ は入射光と散乱光のとの間の角) が

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_0^2(1+\cos^2\theta) \tag{113}$$

となる事を示し、最も偏光が大きい場合の θ と偏光の向きについて考えなさい。(下図 x 方向と y 方向の成分の平均を考える)



8　制動放射

- Fourier 変換

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\ dt \tag{114}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}\ d\omega \tag{115}$$

- Parseval の定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\ dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\ d\omega \tag{116}$$

- 双極子放射の全放射エネルギー W (erg)

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} P\ dt = \int_{0}^{\infty} \frac{dW}{d\omega}\ d\omega \tag{117}$$

(86) を代入し、(116) を用いると、

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{r}}^2\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2}{3\varepsilon_0 c^3}|\hat{\ddot{\mathbf{r}}}|^2\ d\omega \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{2e^2}{3\varepsilon_0 c^3}|\hat{\ddot{\mathbf{r}}}|^2\ d\omega \end{aligned} \tag{118}$$

- 双極子放射のスペクトル $dW/d\nu$ (erg Hz^{-1})

$$\frac{dW}{d\nu} = 2\pi\frac{dW}{d\omega} = \frac{4\pi e^2}{3\varepsilon_0 c^3}|\hat{\ddot{\mathbf{r}}}|^2 \tag{119}$$

(114) より、b を衝突パラメータ (cm) として

$$\hat{\ddot{\mathbf{r}}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{r}} e^{i\omega t}\ dt = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{r}}\ dt, & \omega b \ll v \\ 0, & \omega b \gg v \end{cases} \tag{120}$$

電子が電荷 Ze のイオンの近くをほぼ直線的に通りすぎる場合、進行方向に対し垂直な方向の速度変化だけを考えれば良いので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{r}}\ dt = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b\ dt}{(b^2+v^2t^2)^{3/2}} = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 mbv} \tag{121}$$

(120)(121) より、(119) は、

$$\frac{dW}{d\nu} = \begin{cases} \frac{Z^2e^6}{12\pi^3\varepsilon_0^3c^3m^2b^2v^2}, & \omega b \ll v \\ 0, & \omega b \gg v \end{cases} \tag{122}$$

衝突パラメータ $b \sim b+db$ 間での単位時間単位体積あたりの電子・イオンの衝突数は $n_e n_i 2\pi vb\ db$ で与えられるので、(122) と合わせて

$$\begin{aligned} \frac{d^3W}{d\nu dV dt} &= \frac{d^2P}{d\nu dV} \\ &= n_e n_i 2\pi v \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{dW(b)}{d\nu} b\ db \\ &= \frac{e^6}{6\pi^2\varepsilon_0^3c^3m^2v} n_e n_i Z^2 \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) \end{aligned} \tag{123}$$

b_{max} は近似の成り立つ範囲の上限で

$$b_{max} = \frac{v}{2\pi\nu} \tag{124}$$

b_{min} は電子の運動エネルギーにより分かれ、

$$b_{min} = \begin{cases} \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 mv^2}, & \frac{1}{2}mv^2 \ll 13.6Z^2 \text{ eV} \\ \frac{h}{mv}, & \frac{1}{2}mv^2 \gg 13.6Z^2 \text{ eV} \end{cases} \tag{125}$$

- Gaunt factor g_{ff}

$$g_{ff} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) \tag{126}$$

(123) は、g_{ff} を用いて

$$\frac{d^2P}{d\nu dV} = \frac{e^6}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0^3 m^2 c^3 v} n_e n_i Z^2 g_{ff} \tag{127}$$

- 熱制動放射

Maxwell の速度分布 $v^2\exp(-mv^2/2kT)\ dv$ で (127) を平均化する。$\frac{1}{2}mv^2 \gg h\nu$ でないと放射が出ないので、$v_{min} = (2h\nu/m)^{1/2}$ として、

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{d\nu dV} &= \frac{\int_{v_{min}}^{\infty} \frac{d^2P}{d\nu dV} v^2\exp(-mv^2/2kT)\ dv}{\int_0^{\infty} v^2\exp(-mv^2/2kT)\ dv} \\ &= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{v_{min}}^{\infty} \frac{d^2P}{d\nu dV} v^2\exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right)\ dv \\ &= \frac{e^6}{6\pi^2\varepsilon_0^3 mc^3}\sqrt{\frac{2\pi}{3mkT}} n_e n_i Z^2 e^{-h\nu/kT}\bar{g}_{ff} \end{aligned} \tag{128}$$

($\bar{g}_{ff}$ は velocity averaged Gaunt factor)

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\ dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{129}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\ dx = \left[4\pi\left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2}\right]^{-1} \tag{130}$$

$$\int_{x_0}^\infty x e^{-ax^2}\ dx = \frac{1}{2a}e^{-ax_0^2} \tag{131}$$

- 吸収係数

熱放射は $S_\nu = B_\nu$ で与えられ、(20) より

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu \tag{132}$$

また、(26) より

$$j_\nu = \frac{1}{4\pi}\frac{d^2P}{d\nu dV} \tag{133}$$

(29) を用いて

$$\alpha_\nu = \frac{e^6}{48\pi^3\varepsilon_0^3 mhc}\sqrt{\frac{2\pi}{3mkT}}\frac{n_e n_i Z^2}{\nu^3}(1 - e^{-h\nu/kT})\bar{g}_{ff} \tag{134}$$

$h\nu \gg kT$ のとき $e^{-h\nu/kT} \to 0$

$h\nu \ll kT$ のとき

$$\alpha_\nu = \frac{e^6}{48\pi^3\varepsilon_0^3 mkc}\sqrt{\frac{2\pi}{3mkT^3}}\frac{n_e n_i Z^2}{\nu^2}\bar{g}_{ff} \tag{135}$$

$$= 0.018\frac{n_e n_i Z^2}{T^{3/2}\nu^2}\bar{g}_{ff} \tag{136}$$

視線方向のプラズマの厚さを L (cm) とすると、(18) より

$$\tau_\nu = \alpha_\nu L \tag{137}$$

- Emission measure EM (cm^{-6}pc)
  1pc = 3.086e+18 cm
  水素原子が完全電離している (Hii 領域と呼ばれる) 場合、$Z = 1$, $n_i = n_e$ で、

$$EM \equiv n_e^2 L \tag{138}$$

(137) は、EM と (136) を用いて

$$\tau_\nu = (5.5\mathrm{e}{+}16)\frac{EM}{T^{3/2}\nu^2}\bar{g}_{ff} \tag{139}$$

$\tau_\nu = 1$ となる周波数を ν_c とすると

$$\nu_c = (2.3\mathrm{e}{+}8)\frac{\sqrt{EM}}{T^{3/4}}\sqrt{\bar{g}_{ff}} \tag{140}$$

(43) より、

$$\begin{aligned} I_\nu &= \frac{2k\nu^2}{c^2}T_b = (3.07e{-}37)\nu^2 T(1 - e^{-\tau_\nu}) \\ &= \begin{cases} (3.1e{-}37)\nu^2 T, & \nu \ll \nu_c \\ (1.7e{-}20)\frac{EM}{\sqrt{T}}\bar{g}_{ff}, & \nu \gg \nu_c \end{cases} \end{aligned} \tag{141}$$

周波数が低いときには ν^2 に比例し、周波数が高くなるとほぼ一定の明るさになる。

9　シンクロトロン放射

- 磁場中の相対論的電子の運動方程式

$$\gamma m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{142}$$

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2},\ \beta = \frac{v}{c} \tag{143}$$

- Gyration frequency ω_B (rad Hz)

  $\mathbf{v}$ と $\mathbf{B}$ のなす角を α として (142) を解くと、

$$\begin{cases} v_{\parallel} & = & v\mathrm{cos}\alpha = const. \\ v_{\perp} & = & v\mathrm{sin}\alpha = const. \\ r\omega_B & = & v_{\perp} \\ \gamma m r\omega_B^2 & = & ev_{\perp}B \end{cases} \tag{144}$$

$$\omega_B = \frac{eB}{\gamma m} \tag{145}$$

$$r = \frac{\gamma m}{eB}v\mathrm{sin}\alpha \tag{146}$$

- 相対論的電子からの放射

  瞬間的な静止系での加速度の Lorentz 変換

$$\begin{cases} a'_{\parallel} & = & \gamma^3 a_{\parallel} = 0 \\ a'_{\perp} & = & \gamma^2 a_{\perp} = \gamma^2\omega_B v\mathrm{sin}\alpha = \frac{\gamma eB}{m}v\mathrm{sin}\alpha \end{cases} \tag{147}$$

  (86) より

$$\begin{aligned} P &= \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\gamma^2 e^2 B^2}{m^2}v^2\mathrm{sin}^2\alpha \\ &= \varepsilon_0\sigma_T c^3\beta^2\gamma^2 B^2\mathrm{sin}^2\alpha \end{aligned} \tag{148}$$

全ての立体角で $\sin^2\alpha$ を平均すると、

$$\frac{1}{4\pi}\int \sin^2\alpha \; d\Omega = \frac{2}{3} \tag{149}$$

なので、(148) の全立体角平均は、

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3}\varepsilon_0\sigma_T c^3\beta^2\gamma^2 B^2 \\ &= \frac{4}{3}\sigma_T c\beta^2\gamma^2 U_B \end{aligned} \tag{150}$$

磁場のエネルギー密度 U_B (erg cm^{-3})

$$U_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2 \tag{151}$$

- シンクロトロン放射
相対論的電子が進行方向に対し垂直な方向に加速度を受けるとき、放射は進行方向の頂角 $1/\gamma$ 内部に集中する。この円錐が観測者の方向を向いている時間 Δt 評価のため、$\mathbf{v}$ 及び $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ を含む瞬間的な回転座標系で (142) を再び解くと、

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v & = & const. \\ r'\omega'_B & = & v \\ \gamma m r'{\omega'_B}^2 & = & evB\sin\alpha \end{array} \right. \tag{152}$$

$$\omega'_B = \omega_B \sin\alpha \tag{153}$$

$$r' = \frac{r}{\sin\alpha} \tag{154}$$

Δt の条件は、

$$\omega'_B \Delta t = \frac{2}{\gamma} \tag{155}$$

$$\Delta t = \frac{2}{\gamma \omega_B \mathrm{sin}\alpha} \tag{156}$$

Δt の間の電子の移動量を考えると、観測者が実際に光を受ける時間 Δt_A は $v \approx c$ のとき

$$c\Delta t_A = c\Delta t - v\Delta t \tag{157}$$

$$\Delta t_A = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\Delta t \approx \frac{\Delta t}{2\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^3 \omega_B \mathrm{sin}\alpha} \tag{158}$$

単一電子からのシンクロトロン放射のスペクトルは、$1/\Delta t_A$ 程度の振動数が上限となることがわかる。$v \approx c$ の場合の厳密解は F 関数を用いて以下のようになる事が分かっている。

$$\frac{dP}{d\nu} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^3 B \mathrm{sin}\alpha}{mc} F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \tag{159}$$

$$\nu_c = \frac{3}{4\pi}\gamma^3 \omega_B \mathrm{sin}\alpha = \frac{3e}{4\pi m}\gamma^2 B \mathrm{sin}\alpha \tag{160}$$

$$F(x) = x\int_x^\infty K_{5/3}(\eta)\, d\eta \tag{161}$$

$$= \begin{cases} \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} = 2.13x^{1/3}, & x \ll 1 \\ (\pi x/2)^{1/2} e^{-x}, & x \gg 1 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty F(x)\, dx = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}} \tag{162}$$

(159) の ν 積分は (148)($\beta = 1$) になっている。

- 電子のエネルギーの時間変化

(150) で $\beta = 1$ とし、$E = \gamma mc^2$ を用いると

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{4\sigma_T}{3m^2c^3} U_B E^2 \tag{163}$$

$$E(t) = E(0) \left(1 + \frac{t}{t_{1/2}}\right)^{-1} \tag{164}$$

$t_{1/2}$ は $E(t) = \frac{1}{2}E(0)$ となる時間で、

$$t_{1/2} = \frac{3m^2c^3}{4\sigma_T} U_B^{-1} E(0)^{-1} \tag{165}$$

- 電子エネルギー分布の spectral index p

$$N(E) \propto E^{-p} \tag{166}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{tot}}{d\nu} &= \int_0^\infty N(E) \frac{dP}{d\nu}\, dE \\ &\propto \int_0^\infty \gamma^{-p} BF\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\, d\gamma \end{aligned} \tag{167}$$

$x = \nu/\nu_c$ とおくと、(160) より $\nu_c \propto \gamma^2 B$ なので

$$\frac{\nu}{x} = \nu_c \propto \gamma^2 B \tag{168}$$

$$\frac{\nu}{x^2} dx \propto \gamma B d\gamma \tag{169}$$

(167) は、

$$\begin{aligned} \frac{dP_{tot}}{d\nu} &\propto \nu^{-(p-1)/2} B^{(p+1)/2} \int_0^\infty x^{(p-3)/2} F(x)\, dx \\ &\propto \nu^{-(p-1)/2} B^{(p+1)/2} \end{aligned} \tag{170}$$

観測されるスペクトルを $F_\nu \propto \nu^{-s}$ とすると、

$$s = \frac{p-1}{2} \tag{171}$$

- シンクロトロン自己吸収

電子密度が高くなると、シンクロトロン放射は再び電子に吸収されるようになる。

(56) より、

$$\alpha_\nu = \int\int \frac{h\nu_0}{4\pi}[N(E-h\nu_0)B_{12}-N(E)B_{21}]\phi(\nu)\, d\nu_0 dE \tag{172}$$

$\phi(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$ なので、

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}\int[N(E-h\nu)B_{12} - N(E)B_{21}]\, dE \tag{173}$$

$\frac{dP}{d\nu}$ に対しても (55) から同様に、

$$\frac{dP}{d\nu} = \int h\nu_0 A_{21}\phi(\nu)\, d\nu_0 = h\nu A_{21} \tag{174}$$

(54)(174) より、

$$B_{21} = \frac{c^2}{2h\nu^3}A_{21} = \frac{c^2}{2h^2\nu^4}\frac{dP}{d\nu} \tag{175}$$

(53) で、g は $p \sim p + dp$ の運動量空間における統計的な重みで、

$$g(E)dE = 4\pi p^2 dp = \frac{4\pi E^2}{c^3}dE \tag{176}$$

(53)(176) より、

$$\begin{aligned}B_{12} &= \frac{g(E)}{g(E-h\nu)}B_{21} = g(E)\left[g(E) - h\nu\frac{dg(E)}{dE}\right]^{-1}B_{21}\\ &= \left(1+\frac{2h\nu}{E}\right)B_{21} \qquad (177)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N(E-h\nu) &= N(E) - h\nu\frac{dN(E)}{dE}\\ &= N(E)\left[1-\frac{h\nu}{N(E)}\frac{dN(E)}{dE}\right] \qquad (178)\end{aligned}$$

(175)(177)(178) を (173) に代入

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= \frac{c^2}{8\pi h\nu^3}\int N(E)\left[\frac{2h\nu}{E} - \frac{h\nu}{N(E)}\frac{dN(E)}{dE}\right]\frac{dP}{d\nu}\,dE\\ &= -\frac{c^2}{8\pi\nu^2}\int E^2\frac{d}{dE}\left[\frac{N(E)}{E^2}\right]\frac{dP}{d\nu}\,dE\\ &\propto \nu^{-2}\int\gamma^{-(p+1)}BF\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\,d\gamma \qquad (179)\end{aligned}$$

(168)(169) より

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &\propto \nu^{-(p+4)/2}B^{(p+2)/2}\int_0^\infty x^{(p-2)/2}F(x)\,dx\\ &\propto \nu^{-(p+4)/2}B^{(p+2)/2} \qquad (180)\end{aligned}$$

(20)(170)(180) より、

$$S_\nu = \frac{1}{4\pi\alpha_\nu}\frac{dP_{tot}}{d\nu} \propto \nu^{5/2}B^{-1/2} \qquad (181)$$

(165) を用いて、3μG の磁場の中での 5GeV の電子に対する $t_{1/2}$ を求めなさい。(1G=0.1 g sec^{-1}C^{-1})

10 コンプトン散乱

- Compton scattering
  高エネルギー光子が静止している電子に衝突するとき、その前後でのエネルギーと運動量の変化をそれぞれ $(\epsilon_0, \mathbf{p}_0) \Rightarrow (\epsilon, \mathbf{p})$, $(mc^2, \mathbf{0}) \Rightarrow (\gamma mc^2, \mathbf{p}_e)$ とすると、
  運動量保存則

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_0 &= \mathbf{p} + \mathbf{p}_e \\
|\mathbf{p}_e|^2 &= |\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}|^2 \\
(\gamma m\beta c)^2 &= \left(\frac{\epsilon_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{\epsilon_0}{c}\right)\left(\frac{\epsilon}{c}\right)\cos\theta \\
(\gamma mc^2)^2 &= (mc^2)^2 + \epsilon_0^2 + \epsilon^2 - 2\epsilon_0\epsilon\cos\theta \qquad (182)
\end{aligned}$$

  エネルギー保存則

$$\begin{aligned}
mc^2 + \epsilon_0 &= \gamma mc^2 + \epsilon \\
(\gamma mc^2)^2 &= (mc^2 + \epsilon_0 - \epsilon)^2 \qquad (183)
\end{aligned}$$

  (182)(183) より

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{1 + \frac{\epsilon_0}{mc^2}(1 - \cos\theta)} \qquad (184)$$

- Compton wavelength λ_c (cm)
  (184) を波長で書くと、

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta) \qquad (185)$$

$$\lambda_c \equiv \frac{h}{mc} = 2.42631\ \mathrm{e}{-10}\ \mathrm{cm} \tag{186}$$

- Klein-Nishina formula

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2}\frac{\epsilon^2}{\epsilon_0^2}\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - \sin^2\theta\right) \tag{187}$$

$x = \epsilon_0/mc^2$ とし、(184) を代入して Ω 積分

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_T\left(1 - 2x + \frac{26x^2}{5} + \cdots\right), & x \ll 1 \\ \frac{3}{8}\sigma_T\frac{1}{x}\left(\ln 2x + \frac{1}{2}\right), & x \gg 1 \end{cases} \tag{188}$$

- Doppler effect

$$\frac{c}{\nu} = \frac{\gamma(c - v\cos\theta)}{\nu'} \tag{189}$$

$$\epsilon' = \epsilon\gamma(1 - \beta\cos\theta) \tag{190}$$

- Inverse Compton scattering

$n(\epsilon_0)d\epsilon_0$ を エネルギー $\epsilon_0 \sim \epsilon_0 + d\epsilon_0$ の間の光子の空間密度 (cm^{-3}) とすると、$nd\epsilon_0/\epsilon_0$ は Lorentz 変換に対し保存量となるので (詳細は略)、

$$\frac{nd\epsilon_0}{\epsilon_0} = \frac{n'd\epsilon_0'}{\epsilon_0'} \tag{191}$$

単位時間あたりに散乱されて出てくる光子の総エネルギーは、粒子の運動方向に対し静止系で前後対称な輻射の強度が Lorentz 変換に対し保存量となる事

を用いて (詳細は略)、

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE'}{dt'} = c\sigma \int \epsilon' n' \; d\epsilon'_0 \tag{192}$$

相対論的電子を考える場合、光子との衝突によるエネルギー損失はほとんど無視できるので、電子に対する静止系では Thomson 散乱と考えて良い。即ち、$\sigma = \sigma_T$, $\epsilon' = \epsilon'_0$ なので、(192) を (191)(190) で書き換えていくと、

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= c\sigma_T \int {\epsilon'_0}^2 \frac{n' d\epsilon'_0}{\epsilon'_0} \\ &= c\sigma_T \int {\epsilon'_0}^2 \frac{n d\epsilon_0}{\epsilon_0} \\ &= c\sigma_T \gamma^2 \int (1 - \beta\mathrm{cos}\theta_0)^2 \epsilon_0 n \; d\epsilon_0 \end{aligned} \tag{193}$$

電子の運動は等方的であるとすると、

$$\langle (1 - \beta\mathrm{cos}\theta_0)^2 \rangle = 1 + \frac{1}{3}\beta^2 \tag{194}$$

(193) は、

$$\frac{dE}{dt} = c\sigma_T \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right) U_{\mathrm{ph}} \tag{195}$$

入射光子のエネルギー密度 U_{ph} (erg cm^{-3})

$$U_{\mathrm{ph}} = \int \epsilon_0 n \; d\epsilon_0 \tag{196}$$

一方、散乱により失われる入射光は

$$\frac{dE_0}{dt} = -c\sigma_T \int \epsilon_0 n \; d\epsilon_0 = -c\sigma_T U_{\mathrm{ph}} \tag{197}$$

最終的な放射強度は (195)(197) を合わせて
$\gamma^2 - 1 = \gamma^2\beta^2$ を用いると、

$$\begin{aligned} P &= c\sigma_T U_{\rm ph}\left[\gamma^2\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right)-1\right] \\ &= \frac{4}{3}\sigma_T c\beta^2\gamma^2 U_{\rm ph} \end{aligned} \tag{198}$$

シンクロトロン放射強度 (150) と比較すると、

$$\frac{P_{\rm synch}}{P_{\rm compt}} = \frac{U_B}{U_{\rm ph}} \tag{199}$$

- 逆 Compton 散乱のスペクトル

電子の静止系では Thomson 散乱であると考える場合、入射光及び散乱光に対し (190) とその逆変換を用いると、

$$\begin{cases} \epsilon' = \epsilon'_0 \\ \epsilon'_0 = \epsilon_0\gamma(1-\beta\cos\theta_0) \\ \epsilon = \epsilon'\gamma(1+\beta\cos\theta') \end{cases} \tag{200}$$

$$\epsilon = \epsilon_0\gamma^2(1-\beta\cos\theta_0)(1+\beta\cos\theta') < 4\gamma^2\epsilon_0 \tag{201}$$

逆 Compton 散乱を受けた光子のエネルギーは、電子の運動方向に対する観測系での入射角と静止系での散乱角によって決まり、これらをそれぞれの座標系で立体角平均をとることで与えられる。詳細は煩雑なので省略するが、エネルギー ϵ_0、空間密度 n の単

色光に対する単一の相対論的電子による逆 Compton 散乱のスペクトルは以下のように与えられる。

$$\frac{dP}{d\nu} = 3hc\sigma_T n x f(x) \tag{202}$$

$$x \equiv \frac{\nu}{4\gamma^2\nu_0} \tag{203}$$

等方散乱の場合には、

$$f(x) = \frac{2}{3}(1-x) \tag{204}$$

Tomson 散乱 (113) の場合には、

$$f(x) = 2x\mathrm{ln}x + x + 1 - 2x^2 \tag{205}$$

また (201) より、$0 < x < 1$ である。

(202) を ν で積分すると

$$\begin{aligned} P &= 3hc\sigma_T n \int xf(x)\ 4\gamma^2\nu_0 dx \\ &= 12\sigma_T c\gamma^2\epsilon_0 n \int xf(x)\ dx \\ &= \frac{4}{3}\sigma_T c\gamma^2\epsilon_0 n \end{aligned} \tag{206}$$

$\epsilon_0 n = U_{\mathrm{ph}}$ なので (198)($\beta = 1$) と一致している。

- 電子のエネルギーの時間変化

(199) より (165) で $U_B \Rightarrow U_{\mathrm{ph}}$ と置き換えれば良いことが分かる。

$$t_{1/2} = \frac{3m^2c^3}{4\sigma_T} U_{\mathrm{ph}}^{-1} E(0)^{-1} \tag{207}$$

- 電子エネルギー分布の spectral index p

$$N(E) \propto E^{-p} \tag{208}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP_{tot}}{d\nu} &= \int_0^\infty N(E)\frac{dP}{d\nu}\ dE \\ &\propto \int_0^\infty \gamma^{-p} n x f(x)\ d\gamma\end{aligned} \tag{209}$$

(203) より、

$$\frac{\nu}{\nu_0 x} \propto \gamma^2 \tag{210}$$

$$\frac{\nu}{\nu_0 x^2} dx \propto \gamma d\gamma \tag{211}$$

(209) は、

$$\begin{aligned}\frac{dP_{tot}}{d\nu} &\propto \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{-(p-1)/2} n \int_0^1 x^{(p-1)/2} f(x)\ dx \\ &\propto \nu^{-(p-1)/2} \nu_0^{(p-1)/2} n\end{aligned} \tag{212}$$

入射光子が単色でない場合には、

$$\nu_0^{(p-1)/2} n \Rightarrow \int \nu_0^{(p-1)/2} n(\nu_0)\ d\nu_0 \tag{213}$$

と置き換えれば良い。
観測されるスペクトルを $F_\nu \propto \nu^{-s}$ とすると、

$$s = \frac{p-1}{2} \tag{214}$$

で、これもシンクロトロン放射での関係 (171) と同じとなる。

11　プラズマ

- Maxwell 方程式
  $\mathbf{E},\mathbf{D},\mathbf{H},\mathbf{B}\propto e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ として、

$$\mathrm{div}\mathbf{D}=\rho \qquad \rightarrow i\mathbf{k}\cdot\mathbf{D}=\rho \tag{215}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B}=0 \qquad \rightarrow i\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}=0 \tag{216}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \rightarrow i\mathbf{k}\times\mathbf{H}=\mathbf{j}-i\omega\mathbf{D} \tag{217}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \rightarrow i\mathbf{k}\times\mathbf{E}=i\omega\mathbf{B} \tag{218}$$

  真空の場合には

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H} \tag{219}$$

- プラズマ中の電子の運動 (磁場無し)
  磁場が無視できる場合 $\mathbf{E}\propto e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ として、

$$m\dot{\mathbf{v}}=-e\mathbf{E} \tag{220}$$

$$\mathbf{v}=\frac{e\mathbf{E}}{i\omega m} \tag{221}$$

- Condactivity σ $(\Omega^{-1}\mathrm{cm}^{-1})$
  電子密度 n として、

$$\mathbf{j}=-ne\mathbf{v}=\sigma\mathbf{E} \tag{222}$$

$$\sigma=\frac{ine^2}{\omega m} \tag{223}$$

- プラズマ中での Maxwell 方程式

  連続の式より (または (217) 両辺に $\mathbf{k}$ をかけて)、

$$\mathrm{div}\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{224}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \omega \rho \tag{225}$$

(222)(225) より、

$$\rho = \frac{\sigma \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}}{\omega} \tag{226}$$

(215)(217) は (222)(226) を用いて以下のように書き換えることができる。

$$i\varepsilon \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{227}$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E} \tag{228}$$

- プラズマの誘電率 ε (磁場無し)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\sigma}{i\varepsilon_0 \omega} \right) \\ &= \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \end{aligned} \tag{229}$$

- プラズマ角振動数 ω_p (rad Hz)

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \tag{230}$$

- プラズマの屈折率 n_r

  (108) より、

$$n_r = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{231}$$

- 位相速度 v_{ph} (cm sec^{-1})

$$v_{ph} \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_r} \tag{232}$$

$$k = \frac{n_r \omega}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \tag{233}$$

  $\omega < \omega_p$ の場合 k は虚数となり、

$$\mathbf{E} \propto \exp\left(-\frac{\omega_p}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}} r\right) e^{-i\omega t} \tag{234}$$

  ほぼ $c/\omega_p = \lambda_p/2\pi$ の深さで減衰する波となる。

- 群速度 v_g (cm sec^{-1})

  (233) より

$$\omega = \sqrt{c^2k^2 + \omega_p^2}$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c n_r \tag{235}$$

- Dispersion measure DM (cm^{-3}pc)

  $\omega \gg \omega_p$ の場合、大きさ L (cm) のプラズマ雲を通過するのに必要な時間 t_p は

$$t_p = \frac{L}{v_g} \approx \frac{L}{c}\left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) \tag{236}$$

高い周波数の波ほど早く通過し、$\Delta\omega$ だけ異なる波の間での通過時間の差 Δt_p は、

$$\Delta t_p = -\frac{L\omega_p^2}{c\omega^3}\Delta\omega = -\frac{nLe^2}{\varepsilon_0 mc\omega^3}\Delta\omega \tag{237}$$

$$DM \equiv nL \tag{238}$$

とし (L は pc)、振動数を ν (MHz) で表すと、

$$\Delta t_p = (4.15\mathrm{e}{+}3)DM\Delta(\nu^{-2}) \tag{239}$$

パルサーから発せられるパルスの到着時間の差等から DM を求めることができる。

- プラズマ中の電子の運動 (磁場有り)

外部磁場 $\mathbf{B_0}$ が存在する場合、(220) は

$$m\dot{\mathbf{v}} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B_0}) \tag{240}$$

となるが、以後簡単のため $\mathbf{B_0}$ が光の進行方向 (z) に平行な場合を考える。その場合、電場は光の進行方向に垂直な平面 (xy 平面) 内で右回り/左回り 2 つの成分に分かれて進行する事がわかっている。

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbf{E} & = & Ee^{-i\omega t}(\mathbf{e_x} \mp i\mathbf{e_y}) \\ \mathbf{B_0} & = & B_0\mathbf{e_z} \\ \mathbf{v} & = & a\mathbf{E} \end{array}\right. \tag{241}$$

を (240) に代入すると、

$$-i\omega ma\mathbf{E} = -e(\mathbf{E} + a\mathbf{E} \times \mathbf{B_0})$$

$$= -e(\mathbf{E} \mp iaB_0\mathbf{E})$$

$$\mathbf{v} = \frac{e}{im(\omega \pm \omega_B)}\mathbf{E} \tag{242}$$

ω_B は cyclotron frequency (145)($\gamma = 1$)、

$$\omega_B = \frac{eB_0}{m} \tag{243}$$

また、$\mathbf{E} \times \mathbf{B_0}$ の部分は

$$\begin{aligned}(\mathbf{e_x} \mp i\mathbf{e_y}) \times \mathbf{e_z} &= -\mathbf{e_y} \mp i\mathbf{e_x} \\ &= \mp i(\mathbf{e_x} \mp i\mathbf{e_y})\end{aligned} \tag{244}$$

を用いた。(242) と (221) を比較することにより (223) 式で $\omega \to \omega \pm \omega_B$ と置き換えれば良いことが分かる。(229) に相当する式は、

- プラズマの誘電率 ε (磁場有り)

$$\varepsilon_{R,L} = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_B)}\right] \tag{245}$$

- Faraday rotaion $\Delta\theta$ (rad)

$\omega \gg \omega_p,\ \omega \gg \omega_B$ の場合、(233) に相当する式は

$$\begin{aligned}k_{R,L} &= \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_B)}} \\ &\approx \frac{\omega}{c}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\left(1 \mp \frac{\omega_B}{\omega}\right)\right]\end{aligned} \tag{246}$$

直線偏光している光が厚さ L (cm) のプラズマ雲を通過した場合、右回り/左回りの最終的な位相差の半

分が、透過後の光の偏光面の回転角 $(\Delta\theta)$ となって現れる。

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \frac{1}{2}(k_R - k_L)L \\ &= \frac{\omega_p^2\omega_B}{2c\omega^2}L \\ &= \frac{nLB_0e^3}{2\varepsilon_0 m^2 c\omega^2} \qquad (247)\end{aligned}$$

- Rotation measure RM (rad cm^{-2})
  (247) より、

$$\Delta\theta = RM\lambda^2 \qquad (248)$$

$$\begin{aligned}RM &= \frac{nLB_0e^3}{8\pi^2\varepsilon_0 m^2 c^3} \\ &= 81.2nLB_0 \qquad (249)\end{aligned}$$

(L は pc, B_0 は gauss)

- Depolarization
  電波源内部のどの部分で電磁波が発生したかによって、プラズマの外に出てくるまでの厚さが異なる。様々な Faraday rotation の効果を足し合わせることにより、偏光度が低くなる。$\Delta\theta \sim \pi$ となる λ_d を境に消偏波の効果が現れる。

$$\lambda_d = 0.20(nLB_0)^{-1/2} \qquad (250)$$

12　輝線放射

- 1 電子原子の Schrödinger 方程式

$$\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}+(E-V)=0 \tag{251}$$

$$V=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{252}$$

- 1 電子原子 (質量 m_a) のエネルギー準位 E_n (erg)

$$E_n=-\frac{RhcZ^2}{n^2} \tag{253}$$

$$R=R_\infty\left(1-\frac{m}{m_a}\right) \tag{254}$$

- Rydberg 定数

$$R_\infty=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3c}=1.09737315\ \mathrm{e{+}5\ cm^{-1}} \tag{255}$$

- 1 電子原子の輝線波長 $\lambda_{nn'}$ (cm)

$$\frac{1}{\lambda_{nn'}}=RZ^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n'^2}\right) \tag{256}$$

- 多電子原子の Schrödinger 方程式

$$\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_{ij}^2}+(E-V)=0 \tag{257}$$

$$V=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\sum_i\frac{Z}{r_i}+\sum_i\sum_{i'<i}\frac{1}{r_{ii'}}\right)+H \tag{258}$$

(H はスピン軌道相互作用の項で、軽い原子の場合には無視できる)

- 電子配置

各電子の状態を決める量子数は以下の通り。

主量子数 n ：1,2,3,4,5,6,7,... 順に K,L,M,N,O,P,Q 殻に対応する

軌道角運動量量子数 l ：0,1,2,3,...,$n-1$ の n 個あり、順に $s, p, d, f, ...$ と記号で表す

磁気量子数 m_l ：$-l, ..., +l$ の $2l+1$ 個

スピン量子数 s ：1/2 のみ

スピン磁気量子数 m_s ：$-1/2$,$+1/2$ の 2 個 (これをスピン量子数という事もある)

全角運動量量子数 j ：$l+s, ..., |l-s|$

合成軌道角運動量量子数 L ：l のベクトル和で 0,1,2,3,... 順に $S, P, D, F, ...$ と記号で表す

合成磁気量子数 M_L ：m_l の和で $-L, ..., +L$ の $2L+1$ 個

合成スピン量子数 S ：s の和

合成スピン磁気量子数 M_S ：m_s の和で $-S, ..., +S$ の $2S+1$ 個

合成全角運動量量子数 J ：$L+S, ..., |L-S|$ (L, S どちらかが 0 の場合には分裂しない)

電子が複数ある場合には、スピン・軌道相互作用に

より m_s の縮退が解け、更に外部磁場がある場合には m_l の縮退も解ける (Zeeman 効果)。ある L, S の組み合わせに対する状態数は $(2L+1)(2S+1)$ 個になる。これらは J の値に応じて $2J+1$ 個ずつの状態に分かれる。また、中性原子には I, +,2+,... イオンには II,III,... を元素記号の隣につけて表す。(HI, HeII, OIII 等)

- 選択則 (selection rule)
  $\Delta L = \pm 1, 0$ (但し $L = 0 \to 0$ は不可)
  $\Delta S = 0$ (異重項遷移禁止)
  上記が破れる場合でも満すべき条件として
  $\Delta J = \pm 1, 0$ (但し $J = 0 \to 0$ は不可)
- 遷移の種類
  許容線 (permitted line) : 選択則を満たす遷移
  禁制線 (forbidden line) : それ以外 (記号 [ ])
- スペクトル項 $2p^3\ {}^4S^o_{3/2}$

2	$n = 2$ (L 殻)
p^3	$l = 1$ 状態に電子が 3 個
4	縮退度 $2S + 1 = 4$ (S=3/2), スピン 4 重項
S	$L = 0$
3/2	$J = 3/2$
o	この電子配置のパリティは奇 (偶の時は無し、奇の場合でも省略される事が多い)

- HI, HeII の例

  基底状態：$1s, (L, S) = (0, 1/2) \;\Rightarrow\; 1s\ {}^2S_{1/2}$

$M_L \backslash M_S$	$+1/2$	$-1/2$
0	$(0\uparrow)$	$(0\downarrow)$

  ($0\uparrow$ は $m_l, m_s = 0, +1/2$ である事を表す。)

  励起状態：$2p, (L, S) = (1, 1/2) \;\Rightarrow\; 2p\ {}^2P_{3/2,1/2}$

$M_L \backslash M_S$	$+1/2$	$-1/2$
$+1$	$(+1\uparrow)$	$(+1\downarrow)$
0	$(0\uparrow)$	$(0\downarrow)$
-1	$(-1\uparrow)$	$(-1\downarrow)$

- HeI の例

  基底状態：$1s^2, (L, S) = (0, 0) \;\Rightarrow\; 1s^2\ {}^1S_0$

$M_L \backslash M_S$	$+1$	0	-1
0	—	$(0\uparrow, 0\downarrow)$	—

  (— はパウリの排他律により選択できない部分。)

  励起状態：$1s2s, (L, S) = (0, 1), (0, 0) \Rightarrow\; 1s2s\ {}^3S_1,\ {}^1S_0$

$M_L \backslash M_S$	$+1$	0	-1
0	$(0\uparrow, 0\uparrow)$	$(0\uparrow, 0\downarrow)$,$(0\downarrow, 0\uparrow)$	$(0\downarrow, 0\downarrow)$

  これらは準安定準位 (基底準位への遷移が禁制)

  励起状態：$1s2p, (L, S) = (1, 1), (1, 0) \Rightarrow\; 1s2p\ {}^3P_{2,1,0},\ {}^1P_1$

$M_L \backslash M_S$	$+1$	0	-1
$+1$	$(0\uparrow, +1\uparrow)$	$(0\uparrow, +1\downarrow)$,$(0\downarrow, +1\uparrow)$	$(0\downarrow, +1\downarrow)$
0	$(0\uparrow, 0\uparrow)$	$(0\uparrow, 0\downarrow)$,$(0\downarrow, 0\uparrow)$	$(0\downarrow, 0\downarrow)$
-1	$(0\uparrow, -1\uparrow)$	$(0\uparrow, -1\downarrow)$,$(0\downarrow, -1\uparrow)$	$(0\downarrow, -1\downarrow)$

- NII, OIII の例

  基底状態：$1s^2 2s^2 2p^2$ だが、$1s^2 2s^2$ の部分は 1 通りしか状態がない (閉じている) ので無視する。

  $(L, S) = (2,0), (1,1), (0,0) \;\Rightarrow\; 2p^2\ {}^1D_2,\ {}^3P_{2,1,0},\ {}^1S_0$

$M_L \backslash M_S$	$+1$	0	-1
$+2$	—	$(+1\uparrow, +1\downarrow)$	—
$+1$	$(+1\uparrow, 0\uparrow)$	$(+1\uparrow, 0\downarrow)$,$(+1\downarrow, 0\uparrow)$	$(+1\downarrow, 0\downarrow)$
0	$(+1\uparrow, -1\uparrow)$	$(+1\uparrow, -1\downarrow)$,$(0\uparrow, 0\downarrow)$,$(+1\downarrow, -1\uparrow)$	$(+1\downarrow, -1\downarrow)$
-1	$(-1\uparrow, 0\uparrow)$	$(-1\uparrow, 0\downarrow)$,$(-1\downarrow, 0\uparrow)$	$(-1\downarrow, 0\downarrow)$
-2	—	$(-1\uparrow, -1\downarrow)$	—

- OII, SII の例

  基底状態:$1s^2 2s^2 2p^3, (L, S) = (2, 1/2), (1, 1/2), (0, 3/2)$

  $\Rightarrow\; 2p^3\ {}^2D_{5/2,3/2},\ {}^2P_{3/2,1/2},\ {}^4S_{3/2}$

$M_L \backslash M_S$	$+3/2$	$+1/2$	$-1/2$	$-3/2$
$+3$	—	—	—	—
$+2$	—	$(+1\uparrow, +1\downarrow, 0\uparrow)$	$(+1\downarrow, +1\uparrow, 0\downarrow)$	—
$+1$	—	$(+1\uparrow, 0\uparrow, 0\downarrow)$ $(+1\uparrow, +1\downarrow, -1\uparrow)$	$(+1\downarrow, 0\downarrow, 0\uparrow)$ $(+1\downarrow, +1\uparrow, -1\downarrow)$	—
0	$(+1\uparrow, 0\uparrow, -1\uparrow)$	$(+1\uparrow, 0\uparrow, -1\downarrow)$ $(+1\uparrow, 0\downarrow, -1\uparrow)$ $(+1\downarrow, 0\uparrow, -1\uparrow)$	$(+1\downarrow, 0\downarrow, -1\uparrow)$ $(+1\downarrow, 0\uparrow, -1\downarrow)$ $(+1\uparrow, 0\downarrow, -1\downarrow)$	$(+1\downarrow, 0\downarrow, -1\downarrow)$
-1	—	$(-1\uparrow, 0\uparrow, 0\downarrow)$ $(-1\uparrow, -1\downarrow, +1\uparrow)$	$(-1\downarrow, 0\downarrow, 0\uparrow)$ $(-1\downarrow, -1\uparrow, +1\downarrow)$	—
-2	—	$(-1\uparrow, -1\downarrow, 0\uparrow)$	$(-1\downarrow, -1\uparrow, 0\downarrow)$	—
-3	—	—	—	—

- 水素輝線

  水素：$n+\Delta n \ \rightarrow \ n$ の遷移で、各 n に対し以下の名前と記号が対応する。

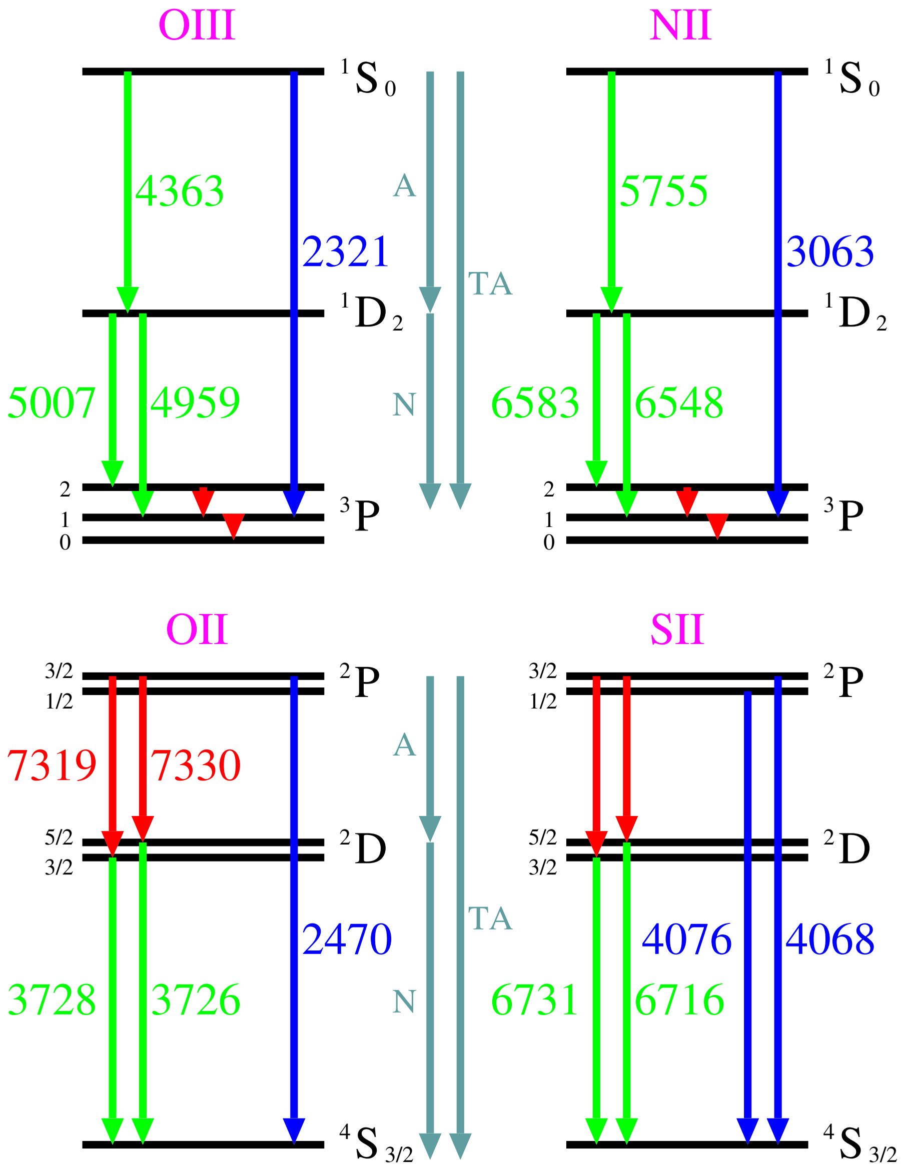
n	1	2	3	4	5
名前	Lyman	Balmer	Paschen	Brackett	Pfund
記号	Ly	H	Pa	Br	Pf

$\Delta n = 1, 2, 3, ...$ の順に $\alpha, \beta, \gamma, ...$ を付ける。

名前	n	Δn	波長 (Å)
Lyα	1	1	1216
Lyβ	1	2	1026
Lyγ	1	3	973
Ly limit	1	∞	912
Hα	2	1	6563
Hβ	2	2	4861
Hγ	2	3	4341
H limit	2	∞	3646
Paα	3	1	18751
Paβ	3	2	12818
Paγ	3	3	10938
Pa limit	3	∞	8204

これらの値は (256) で計算できる。

- その他の主な輝線


OIII
NII
OII
SII
$^1S_0$
$^1D_2$
^3P
2
1
0
4363
2321
5007
4959
5755
3063
6583
6548
A
N
TA
^2P
^2D
$^4S_{3/2}$
3/2
1/2
5/2
3/2
7319
7330
2470
3728
3726
4076
4068
6731
6716

これらの輝線のほとんどは準安定準位と基底準位間での禁制線で、密度の薄いガス雲から放射される。[OIII]λ5007, [OII]$\lambda\lambda$3727 等と表される ($\lambda\lambda$ は輝線 2 本に対応)。N/A/TA はそれぞれ nebular/auroral/trans-auroral line と呼ばれる。

- 分子輝線

  分子のエネルギー準位には、電子準位E_e(量子数Λ, Σなど原子の場合のローマ字をギリシャ文字に置き換えたもの)/振動準位E_v(量子数v)/回転準位E_r(量子数J)があり、振動遷移は赤外線で、回転遷移は電波で観測される(電子準位は可視光に相当するが、普通は観測されない)。

$$E_v = hc\omega_e\left(v + \frac{1}{2}\right) + ... \tag{259}$$

$$E_r = \frac{h^2}{8\pi^2 I}J(J+1) = hBJ(J+1) \tag{260}$$

  (ω_e:特性振動数, I:慣性モーメント, B:回転定数)
  $\Delta J = -2, -1, 0, +1, +2$の順で$S, R, Q, P, O$ branchと呼ばれる。水素分子$(v, J) = (1, 4) \rightarrow (0, 2)$の遷移は$H_2$v=1–0S(2) (最後の2は遷移後の$J$値)のように表される。

- 中性水素21cm線

  電子と陽子のスピンの磁気双極子同士の相互作用で、スピンが平行な状態(3重項)から反平行な状態(1重項)への遷移による輝線。超微細構造禁制線と呼ばれ、遷移確率は非常に小さいが、中性水素原子は豊富にあるため観測することができる。

13　ガス雲からの輝線

- 分配関数

(50) でも用いた通り、準位 i に属する電子数密度 $n_i \propto g_i \mathrm{exp}(-E_i/kT)$ だから、

$$\frac{n_i}{n} = \frac{g_i e^{-E_i/kT}}{U} \tag{261}$$

$$n = \sum n_i \tag{262}$$

$$U = \sum g_i e^{-E_i/kT} \tag{263}$$

U を分配関数という。

- Saha の電離式

(50) を自由 (速度 v)–束縛 ($n = 1$) 遷移にまで拡張すると、χ をイオン化エネルギーとして、

$$\begin{aligned}\frac{dn_1^+(v)}{n_1} &= \frac{g_1^+ g_e}{g_1}\mathrm{exp}\left[-\frac{(\chi + \frac{1}{2}mv^2)}{kT}\right] \\ &= \frac{8\pi m^3}{n_e h^3}\frac{g_1^+}{g_1}\mathrm{exp}\left[-\frac{(\chi + \frac{1}{2}mv^2)}{kT}\right] v^2\ dv\end{aligned} \tag{264}$$

$$\begin{aligned}g_e &= \frac{2dx_1dx_2dx_3dp_1dp_2dp_3}{h^3} \qquad (2 : \mathrm{spin}) \\ &= \frac{2}{h^3}\frac{1}{n_e}4\pi p^2 dp \\ &= \frac{8\pi m^3 v^2 dv}{n_e h^3}\end{aligned} \tag{265}$$

(264) を (130) を用いて v で積分すると、

$$\frac{n_1^+ n_e}{n_1} = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} \frac{2g_1^+}{g_1} e^{-\chi/kT} \tag{266}$$

(261) で基底状態を含む全ての状態の和に変換

$$\frac{n^+ n_e}{n} = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} \frac{2U(T)^+}{U(T)} e^{-\chi/kT} \tag{267}$$

(267) は $j \leftrightarrow j+1$ 階電離間の平衡に関しても $0 \leftrightarrow +1$ の場合と同様に適用できる。

- HII 領域

高温度星などからの紫外線により、水素が完全にイオン化されている領域を HII 領域と呼ぶ。そのような所では電離ガスは熱平衡から大きくずれる。α_{nL} を自由–束縛 (準位 nL) 間の再結合係数、$A_{n'L',nL}$ を準位 $n'L' \to nL$ の Einstein A 係数として、準位 nL の局所的な平衡条件は

$$n_p n_e \alpha_{nL}(T) + \sum_{n'>n}^{\infty} \sum_{L'} n_{n'L'} A_{n'L',nL} = n_{nL} \sum_{n''=1}^{n-1} \sum_{L''} A_{nL,n''L''} \tag{268}$$

(266) より、

$$\frac{n_p n_e}{n_{1S}} = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi/kT} \tag{269}$$

熱平衡からのずれを b_n とすると (50) より、

$$\frac{n_{nL}}{n_{1S}} = b_n(2L+1) e^{-h\nu_{n1}/kT} \tag{270}$$

準位 n のイオン化エネルギー $\chi_n = \chi - h\nu_{n1}$ として (269)(270) を合わせると、

$$n_{nL} = b_n(2L+1)\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} e^{\chi_n/kT} n_p n_e \quad (271)$$

(268) に代入

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_{nL}(T)}{(2L+1)}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_n/kT} \\
&+ \sum_{n'>n}^{\infty}\sum_{L'} b_{n'} A_{n'L',nL}\left(\frac{2L'+1}{2L+1}\right) e^{(\chi_{n'}-\chi_n)/kT} \\
&= b_n \sum_{n''=1}^{n-1}\sum_{L''} A_{nL,n''L''} \qquad (272)
\end{aligned}$$

この式は温度 T を決めれば b_n 以外は全て既知であるため、十分大きい n で $b_n = 1$ とすれば、順に n を減らして b_1 まで求める事が可能である。b_n が全て求まったら、(271) で n_{nL} を求め、

$$\begin{aligned}
j_{nn'} &= \frac{h\nu_{nn'}}{4\pi}\sum_{L=0}^{n-1}\sum_{L'=L\pm1} n_{nL} A_{nL,n'L'} \\
&= \frac{h\nu_{nn'}}{4\pi} n_p n_e \alpha_{nn'}^{eff} \qquad (273)
\end{aligned}$$

で輝線強度が求められる ($\alpha_{nn'}^{eff}$ を effective recombination coefficient と呼ぶ)。この結果は、輝線が再吸収を受けない光学的に極限まで薄いガス雲の状態を表しており、Case A と呼ばれる。逆に、Lyα に対

し光学的に十分厚い場合、基底状態 $n = 1$ への遷移により放射される輝線は、周囲のガスによってすぐに再吸収されてしまうため、$n = 1$ への遷移は考慮する必要がなくなる ((268)(272) 右辺の和は $n'' = 2$ からとなる)。この場合を Case B と呼ぶ。高温度星周辺の HII 領域は光学的に厚く、Case B で近似できる。

- Case A での水素輝線比

T (K)	2500	5000	10000	20000
$\alpha_{H\beta}^{eff}$ (e-14 cm^{3}sec^{-1})	6.61	3.78	2.04	1.03
Lyα/Hβ	33.0	32.5	32.7	34.0
Hα/Hβ	3.42	3.10	2.86	2.69
Hγ/Hβ	0.439	0.458	0.470	0.485

- Case B での水素輝線比

T (K)	2500	5000	10000	20000
$\alpha_{H\beta}^{eff}$ (e-14 cm^{3}sec^{-1})	9.07	5.37	3.03	1.62
Lyα/Hβ	—	—	—	—
Hα/Hβ	3.30	3.05	2.87	2.76
Hγ/Hβ	0.444	0.451	0.466	0.474

これらの輝線比は赤化量の推定に用いられる。

- 衝突遷移

密度 n_e, 速度 v の電子による、原子 (イオン) の準位 $1 \rightarrow 2$ の衝突遷移の断面積を σ_{12} とすると、遷移確率は $n_e v \sigma_{12}$ と表される。n_e 以外の部分を Maxwell 速度分布で平均化して、

$$q_{12} = \frac{\int_0^\infty \sigma_{12} v^3 \exp(-mv^2/2kT)\ dv}{\int_0^\infty v^2 \exp(-mv^2/2kT)\ dv} \tag{274}$$

密度が十分に高い場合、自然放射に関係なく衝突遷移だけで平衡状態に達していると考えられるので、準位 1,2 それぞれの原子 (イオン) 密度を n_1, n_2 として、

$$n_e n_1 q_{12} = n_e n_2 q_{21} \tag{275}$$

(50)(275) より、

$$\frac{q_{21}}{q_{12}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu_0}{kT}\right) \tag{276}$$

自然放射を含めた平衡を考えると、

$$n_e n_1 q_{12} = n_e n_2 q_{21} + n_2 A_{21} \tag{277}$$

(276) より、

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{h\nu_0} j = n_2 A_{21} &= \frac{n_e n_1 q_{12} A_{21}}{n_e q_{21} + A_{21}} \\ &= \frac{n_e n_1 A_{21} \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT}\right)}{n_e + \frac{A_{21}}{q_{21}}} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} n_e n_1 q_{12} & (n_e \ll n_c) \\ n_1 A_{21} \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT}\right) & (n_e \gg n_c) \end{cases} \tag{278}$$

- Critical density n_c (cm^{-3})

$$n_c = \frac{A_{21}}{q_{21}} \tag{279}$$

これよりも n_e が小さい場合には、(278) より A_{21} の値に関係なく放射が出る事がわかる。即ち、禁制線が放射される限界の電子密度で、一般に準位 i の critical density は

$$n_c = \frac{\sum_{j<i} A_{ij}}{\sum_{j\neq i} q_{ij}} \tag{280}$$

で与えられる。

- Doppler Broadening

ガス雲内では、原子は熱運動によりランダムに飛び回っており、Doppler 効果で輝線幅が広がる。視線方向を z とすると (189) の逆変換より、

$$\frac{c}{\nu'} = \frac{\gamma(c + v\cos\theta')}{\nu} \tag{281}$$

$v\cos\theta' = v_z$, $\gamma = 1$, $\nu' = \nu_0$ とすると、

$$v_z = \frac{c(\nu - \nu_0)}{\nu_0} \tag{282}$$

$$dv_z = \frac{cd\nu}{\nu_0} \tag{283}$$

$\nu \sim \nu + d\nu$ 間の原子数は (282)(283) を用いて、

$$\exp\left(-\frac{m_a v_z^2}{2kT}\right)\ dv_z \propto \exp\left[-\frac{m_a c^2(\nu-\nu_0)^2}{2\nu_0^2 kT}\right]\ d\nu \tag{284}$$

に比例する。よって line profile function $\phi(\nu)$ は、

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_D\sqrt{\pi}} e^{-(\nu-\nu_0)^2/\Delta\nu_D^2} \tag{285}$$

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m_a}} \tag{286}$$

Gaussian となる。

- Natural Broadening と Collisional Broadening
  不確定性原理により、寿命の短い (n の大きい) 準位にはそのエネルギーに広がりができる。これによる輝線の広がりを Natural Broadening という。また、遷移中の衝突により光の位相がランダムに変えられると、重ね合わせとして得られる波の周波数分布に広がりができる。 これによる輝線の広がりを Collisional/Pressure Broadening という。これらの line profile function は、どちらも (104) と同じ Lorentzian となり、衝突頻度を ν_{col} (Hz) とすると、

$$\phi(\nu) = \frac{\Gamma/4\pi^2}{(\nu-\nu_0)^2 + (\Gamma/4\pi)^2} \tag{287}$$

$$\Gamma = \sum_{n'<n} A_{nn'} + 2\nu_{col} \tag{288}$$

- Gaussian と Lorentzian の合成
  実際には上記 3 つの broadening の効果は混ざっており、正確な line profile function はこれらの合成で与えられる。(282) 式より輝線中心は Doppler 効果で $\nu_0(1+v_z/c)$ となるため、(287) の ν_0 をこれに置き換えて Maxwell 分布で平均化すると、

$$\begin{aligned}\phi(\nu) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma/4\pi^2}{[\nu-\nu_0(1+v_z/c)]^2+(\Gamma/4\pi)^2} \exp(-mv_z^2/2kT)\ dv_z}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-mv_z^2/2kT)\ dv_z} \\ &= \frac{1}{\Delta\nu_D\sqrt{\pi}} H(a,u) \end{aligned} \tag{289}$$

$$a = \frac{\Gamma}{4\pi\Delta\nu_D}, \quad u = \frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D} \tag{290}$$

- Voigt function
  中央付近では Gaussian、裾野では Lorentzian の形状を持つ。

$$H(a,u) \equiv \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}\ dy}{a^2+(u-y)^2} \tag{291}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(a,u)\ du = \sqrt{\pi} \tag{292}$$

14　星の構造

- 連続条件

  半径 r での密度を ρ、内側の質量を M_r として、

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{293}$$

- 重力ポテンシャル ϕ (erg g^{-1})

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{GM_r}{r^2} \tag{294}$$

  万有引力定数 $G = 6.673$ e-8 erg cm g^{-2}

- Poisson 方程式

  (293)(294) より、

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = \frac{G}{r^2}\frac{dM_r}{dr} = 4\pi G\rho \tag{295}$$

- 力学平衡条件

  半径 r での圧力を P として、

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \tag{296}$$

- 状態方程式

  平均分子量 μ, 陽子質量 m_p として、

$$P = \frac{\rho}{\mu m_p}kT \tag{297}$$

  陽子質量 $m_p = 1.67262158$ e-24 g

- 密度一定の星

星の半径を R, 全質量を M とすると (293) より、

$$M_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \tag{298}$$

(296)(298) を $r = R$ で $P = 0$ の条件で解くと、

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3}\pi r G \rho^2 \tag{299}$$

$$P = \frac{2}{3}\pi G \rho^2 (R^2 - r^2) \tag{300}$$

中心の圧力 P_c と温度 T_c は (297)(298) より、

$$P_c = \frac{2}{3}\pi G \rho^2 R^2 = \frac{3GM^2}{8\pi R^4} \tag{301}$$

$$T_c = \frac{\mu m_p GM}{2kR} \tag{302}$$

水素、ヘリウム、重元素の重量比 (通常 X, Y, Z で表す) と平均分子量 (原子量/(電子数 $+1$)) は、

	水素	ヘリウム	重元素
平均分子量	1/2	4/3	∼2
重量比	0.70	0.28	0.02

粒子数の関係から全体の平均分子量を出すと、

$$\frac{1}{\mu} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z = \frac{1}{0.617} \tag{303}$$

太陽質量 $M_\odot = 1.989$ e+33 g, 太陽半径 $R_\odot = 6.960$ e+10 cm に対する中心温度は、(302) より $T_c = 0.74$ e+7 K (実際は $T_c = 1.5$ e+7 K)。

重力ポテンシャルは (294)(298) より、

$$\frac{d\phi}{dr} = \begin{cases} \frac{GM}{r^2} & (r > R) \\ \frac{4}{3}\pi G\rho r = \frac{MG}{R^3} r & (r < R) \end{cases} \tag{304}$$

$$\phi = \begin{cases} -\frac{GM}{r} & (r > R) \\ -\frac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2) & (r < R) \end{cases} \tag{305}$$

($r = R$ で連続する条件で積分定数を決定)

自己重力場での重力エネルギー

$$W = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \phi_i \tag{306}$$

(306) より星の重力エネルギーは、

$$W = \frac{1}{2}\int_0^R \rho\phi 4\pi r^2 \, dr = -\frac{3GM^2}{5R} \tag{307}$$

粒子 1 個あたりの熱エネルギーは $\frac{3}{2}kT$ で、単位質量あたり $1/\mu m_p$ 個の粒子があることから、星の熱エネルギーは (297)(300) を用いて、

$$\begin{aligned} U &= \int_0^R \frac{3kT}{2\mu m_p}\rho 4\pi r^2 \, dr = \int_0^R \frac{3}{2} P 4\pi r^2 \, dr \\ &= \frac{3GM^2}{10R} = -\frac{1}{2}W \end{aligned} \tag{308}$$

星の全エネルギーは

$$E = U + W = \frac{1}{2}W \tag{309}$$

星が単位時間に放出するエネルギーは

$$L = -\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dW}{dt} = \frac{dU}{dt} \tag{310}$$

星が縮んで重力エネルギーが解放されると、放射と内部温度の上昇に半分ずつのエネルギーが割り振られる。その結果、星はエネルギーを放出することにより温度が上がり、比熱が負の振る舞いをする。

- Eddington luminosity L_E (erg sec^{-1})

電子への輻射圧が水素原子1個あたりの重力と等しくなる光度で、天体の質量あたりの明るさの上限を与える。

$$\frac{GMm_p}{r^2} = \frac{\sigma_T L_E}{4\pi r^2 c} \tag{311}$$

$$\begin{aligned} L_E &= \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} \\ &= (1.3\ \mathrm{e}{+}38)\frac{M}{M_\odot}\ \mathrm{erg\ sec}^{-1} \\ &= (3.3\ \mathrm{e}{+}4)\frac{M}{M_\odot}L_\odot \end{aligned} \tag{312}$$

(太陽光度 $L_\odot$ =3.85 e+33 erg sec^{-1})

15　銀河のスペクトル

- Population synthetic model
  星のスペクトルや明るさの進化は、星の質量毎に理論的に詳細に計算されており、ほとんどの場合において観測値を良く再現することが知られている。銀河全体のスペクトルは、様々な質量の星のスペクトルの足し合せで再現することができ、population synthetic model と呼ばれる。
- Star formation rate SFR ($M_\odot \mathrm{yr}^{-1}$)

$$\text{Instantaneous burst} : SFR \propto \delta(t) \tag{313}$$

$$\text{Exponential burst} : SFR \propto \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{314}$$

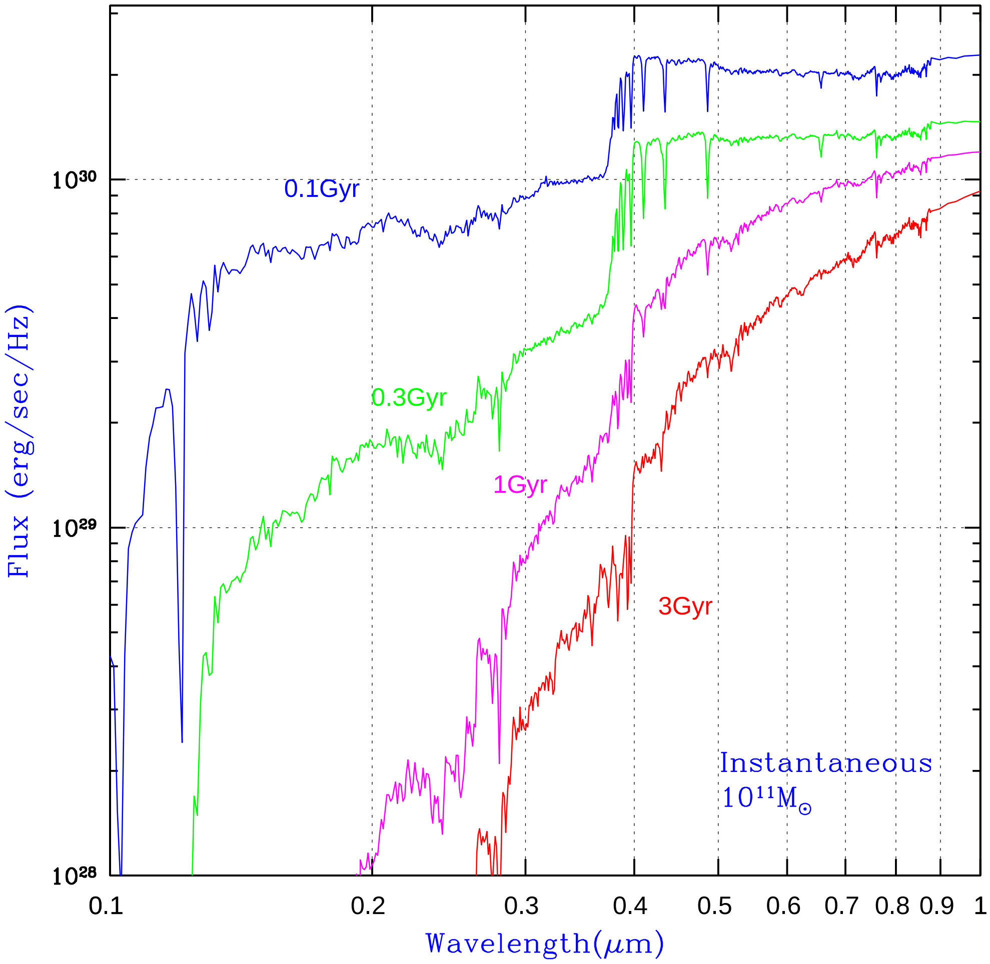
$$\text{Constant formation} : SFR = const. \tag{315}$$

- Initial mass function IMF
  生成される星の質量分配比

$$IMF \propto M^{-1.35} \quad \text{(Salpeter)} \tag{316}$$

対象とする星の質量は通常 $0.1 \sim 120 M_\odot$ であるが、範囲や傾きは model により様々。

SFR, IMF を決めれば銀河の星形成史は一位に定まり、銀河のスペクトルの進化が星の重ね合わせとして計算できる。



SFR: Instantaneous burst, IMF: Salpeter で計算した 1e+11$M_\odot$ の銀河のスペクトル進化。若い銀河では、太陽質量の数倍程度の星の寄与が主で、Balmer jump と呼ばれる水素の Balmer 吸収端 (∼3700Å) が顕著であるが、古い銀河では太陽質量程度の星の寄与が主で、4000Åbreak と呼ばれる Ca 等の重元素による吸収が現れる。

- 減光

  可視光 V-band (5500Å) での減光量 A_V (mag)

$$A_V = -2.5\log\left(\frac{I_{\rm observed}}{I_{\rm intrinsic}}\right) \tag{317}$$

  B-band (4400Å) との減光量の差 $E(B-V)$ (mag)

$$E(B-V) = A_B - A_V = \frac{A_V}{R} \tag{318}$$

  R は dust の size や形状によって決まる定数だが、観測的に星間空間では $R \sim 3.1$ (星形成領域では 4~6) である事が判っている。

  星間 dust は可視光の波長とほぼ同じサイズの微粒子であり、散乱特性は複雑である (Mie 散乱)。また、我々の銀河系と大マゼラン雲 (LMC)、小マゼラン雲 (SMC) 間でも紫外域での dust の性質は大きく異なる。観測的には、

$$\frac{A_\lambda}{A_V} \sim \begin{cases} 0.5\lambda^{-1.1} & \text{UV(SMC), Optical} \\ 0.4\lambda^{-1.6} & \text{NIR} \end{cases} \tag{319}$$

  となっている。

- Optical depth との関係

  (17)(317) の比較より、

$$\frac{I_{\rm observed}}{I_{\rm intrinsic}} = 10^{-A_\lambda/2.5} = e^{-\tau_\lambda} \tag{320}$$

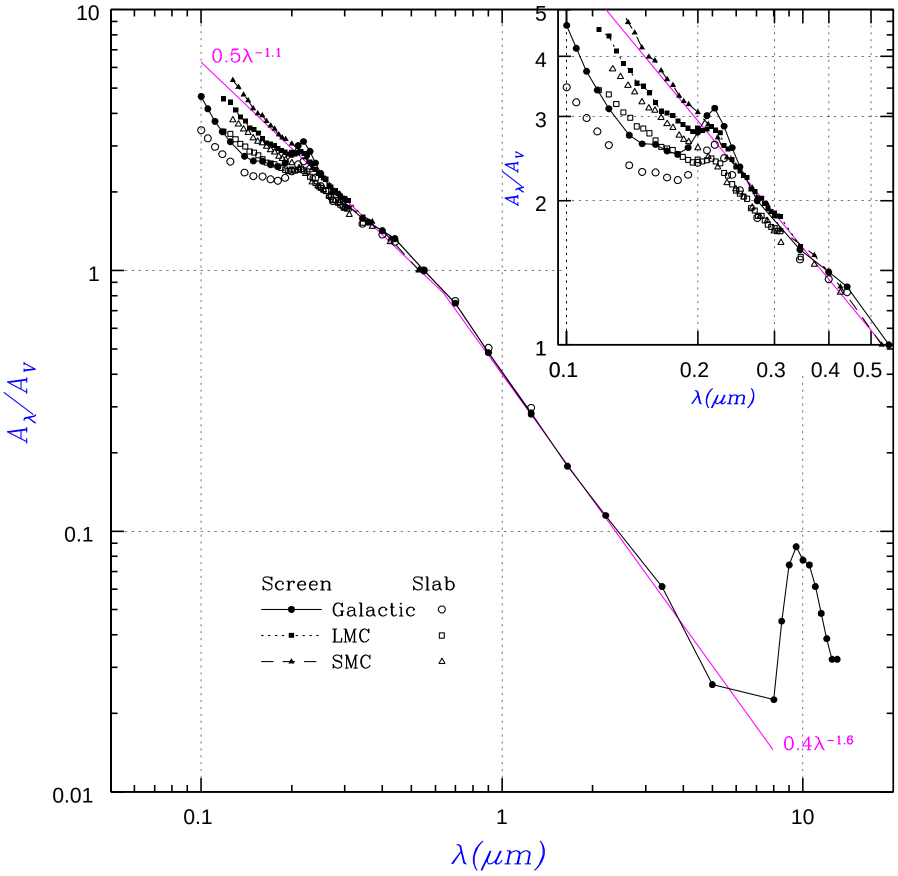
  $10^{0.4} \sim e$ より $A_\lambda \sim \tau_\lambda$ となる。

- Screen/Slab dust 分布

  A_λ の減光を伴う dust が銀河の手前に層状に存在する (Screen dust) 場合、減光量は単に (320) で与えられる通りであるが、銀河内部で星と dust が均一に混ざっている (Slab dust) 場合、銀河表面と奥で減光量が変化する効果を考慮する。

$$\frac{I_{\rm observed}}{I_{\rm intrinsic}} = \int_0^1 10^{(-A_\lambda x/2.5)}\ dx$$

$$= \frac{1-10^{(-A_\lambda/2.5)}}{\ln 10 A_\lambda/2.5} = 10^{-A'_\lambda/2.5} \qquad (321)$$



- 輝線放射

古い銀河は銀河に含まれるガスが少なく、また、HII 領域を伴うような高温度星も少ないので、輝線はほとんど出ていない。一方、若い銀河からは高温度星の数に比例して輝線が放射されることから、輝線強度から SFR を見積る事ができる。観測的には Hα, [OII]$\lambda\lambda$3727 の輝線強度をそれぞれ $L(\mathrm{H}\alpha)$, $L([\mathrm{OII}])$ erg sec^{-1} として、

$$SFR = (7.9\ \mathrm{e}{-42}) L(\mathrm{H}\alpha)\ M_{\odot}\mathrm{yr}^{-1} \tag{322}$$

$$SFR = (1.4\ \mathrm{e}{-41}) L([\mathrm{OII}])\ M_{\odot}\mathrm{yr}^{-1} \tag{323}$$

で与えられる。また、Case B での水素輝線比 $H\alpha/H\beta = 2.86$ (10000K) を用いて、(319)(320) から A_V を求める事ができる。

$$\log\frac{H\alpha/H\beta}{2.86} \sim -\frac{A_V}{2.5}\cdot 0.5(0.4861^{-1.1} - 0.6563^{-1.1})$$

$$A_V \sim 8\ \log\frac{H\alpha/H\beta}{2.86} \tag{324}$$