法線マップから面形状への変換

法線 x 成分マップを x 方向に積算すると、x 方向には情報が繋がった高さマップ X_{ij} ができる。同様に y 成分マップを y 方向に積算した高さマップを Y_{ij} とする。ここで、i, j は鏡面上メッシュでのグリッド位置に対応し、j が x, i が y 方向に対応する整数であるものとする。X_{ij} を y 方向に接続する数列を x_i、Y_{ij} を x 方向に接続する数列を y_j とすると、$X_{ij} + x_i, Y_{ij} + y_j$ で表される 2 通りの面形状の差の 2 乗和が最小になる条件から、

$$\sum_i \sum_j ((X_{ij} + x_i) - (Y_{ij} + y_j))^2 = min$$

x_i, y_j に対する偏微分が全て 0 となるので、

$$\sum_j ((X_{ij} + x_i) - (Y_{ij} + y_j)) = 0$$

$$\sum_i ((X_{ij} + x_i) - (Y_{ij} + y_j)) = 0$$

それぞれを j, i の要素数で割り平均で表すと、

$$\overline{X}_i + x_i = \overline{Y}_i + \overline{y}$$

$$\overline{X}_j + \overline{x} = \overline{Y}_j + y_j$$

となる。$\overline{y}, \overline{x}$ を求めるため、それぞれの式を更に i, j で平均化すると、どちらの式も

$$\overline{\overline{X}} + \overline{x} = \overline{\overline{Y}} + \overline{y}$$

となる。

$$\overline{x} = -\overline{\overline{X}}$$

$$\overline{y} = -\overline{\overline{Y}}$$

となるようにしておけばこの条件は満たされることがわかる。即ち、

$$x_i = \overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}} - \overline{X}_i$$

$$y_j = \overline{X}_j - \overline{\overline{X}} - \overline{Y}_j$$

で x_i, y_j が表される。これらを用いて面形状を 2 通りで表して平均すれば、求める形状 Z_{ij} が得られる。

$$Z_{ij} = (X_{ij} + x_i + Y_{ij} + y_j)/2$$