バイコニック面の法線の計算

バイコニック面の定義式

$$z = \frac{c_x x^2 + c_y y^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k_x)c_x^2 x^2 - (1+k_y)c_y^2 y^2}}$$

$$c_x = 1/R_x \ , \ c_y = 1/R_y$$

これを変形すると、

$$f(x,y,z) = -c_x^2 x^4 - c_y^2 y^4 + c_x x^2 z(2 - (1+k_x)c_x z) + c_y y^2 z(2 - (1+k_y)c_y z) - 2c_x c_y x^2 y^2 = 0$$

この全微分を考えると、

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$$

なので、法線ベクトルは

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

となる。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2c_x x(z(2 - (1+k_x)c_x z) - 2c_x x^2 - 2c_y y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2c_y y(z(2 - (1+k_y)c_y z) - 2c_x x^2 - 2c_y y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2c_x x^2(1 - (1+k_x)c_x z) + 2c_y y^2(1 - (1+k_y)c_y z)$$

全体を 2 で割り、共通部分を置き換えて見やすくすると、

$$C_x = c_x x^2 \ , \ K_x = 1 - (1+k_x)c_x z$$

$$C_y = c_y y^2 \ , \ K_y = 1 - (1+k_y)c_y z$$

$$\frac{\partial f}{2\partial x} = c_x x(z(K_x + 1) - 2C_x - 2C_y)$$

$$\frac{\partial f}{2\partial y} = c_y y(z(K_y + 1) - 2C_x - 2C_y)$$

$$\frac{\partial f}{2\partial z} = C_x K_x + C_y K_y$$

これを長さ 1 に規格化すれば良い。

但し、$x = 0$, $y = 0$ $(z = 0)$ の場合は特異点となっているので、(0,0,1) を与える必要がある。